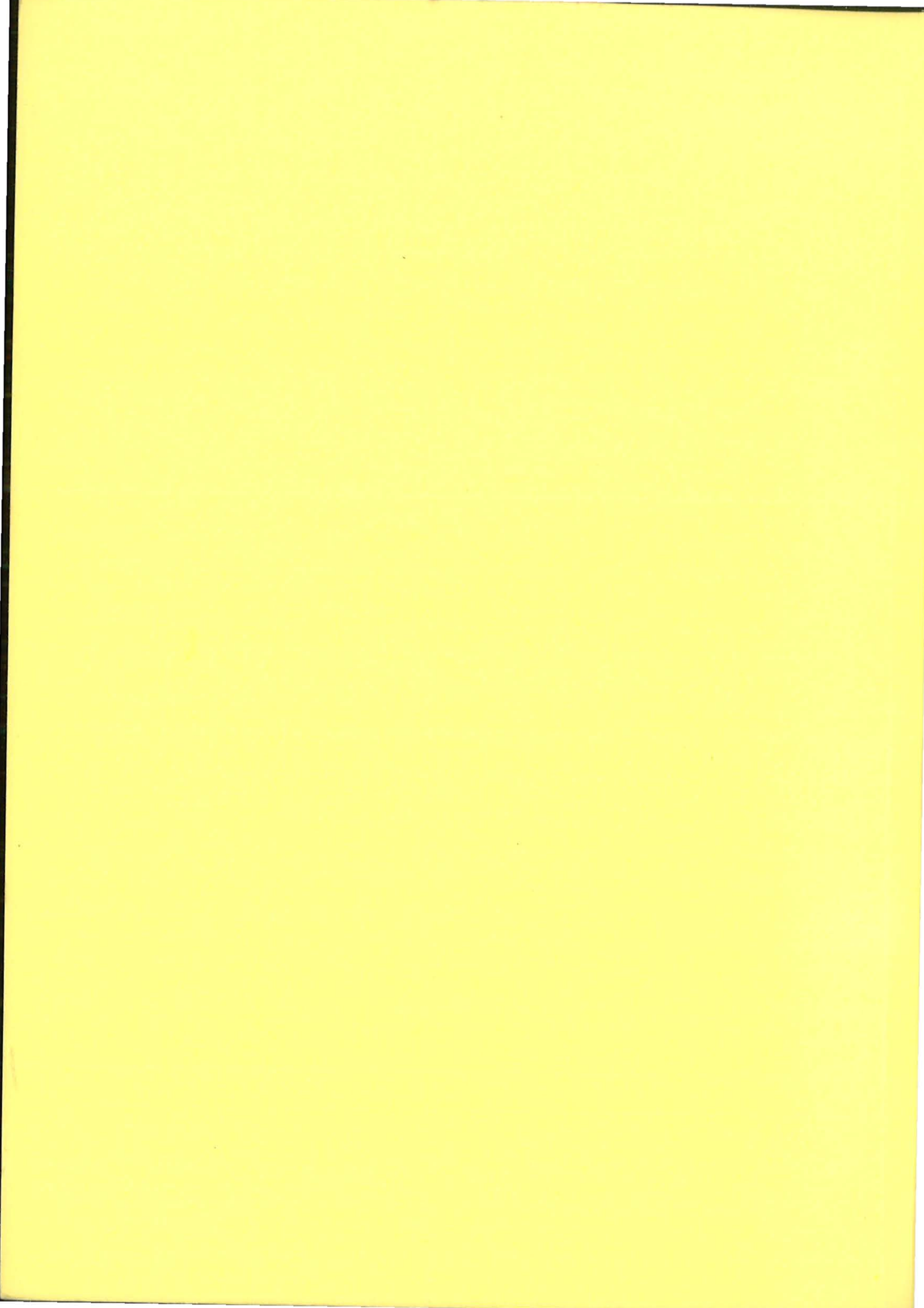


HERBERT STACHOWIAK

Zum Problem einer logisch-semantischen Maßbestimmung des Lernerfolges

BEIHEFT ZU BAND 7 DER

GRUNDLAGENSTUDIEN
AUS
KYBERNETIK
UND GEISTESWISSENSCHAFT

VERLAG SCHNELLE QUICKBORN

1966
Verlag Schnelle, Eberhard und Wolfgang Schnelle GmbH, Quickborn

Druck und Einband: Maurischat & Bevensee, Quickborn
Printed in Germany

VORWORT DER SCHRIFTLEITUNG

Erstmals erscheint als Beiheft der "Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft" nicht eine Reproduktion einer kybernetikgeschichtlich interessanten älteren Schrift, sondern eine Arbeit über ein für die künftige Entwicklung bedeutsames Thema.

In kybernetisch-pädagogischer Präzisierung einer phänomenologischen Analyse von Paul Heimann ist pädagogisches Geschehen ein Punkt in einem sechsdimensionalen Raum: *etwas* (Lehrstoff L) wird durch gewisse *Mittel* (Medium M) *jemanden* (gekennzeichnet durch dessen Psychostruktur P) während der *Nebeneinwirkung* eines soziokulturellen Rahmens (Soziostruktur S) zu einem bestimmten *Zweck* (Ziel Z) in feststehender *Weise* (nach einem Lehralgorithmus Λ) gelehrt. Alle sechs pädagogischen Variablen sind informationeller Art und bilden den Gegenstand je einer pädagogischen Disziplin erster Stufe. Die pädagogischen Disziplinen zweiter Stufe fragen nach den Untermengen des Wertevorrats einer der pädagogischen Variablen, welche je einer der (zylindrischen) Punktmengen des pädagogischen Raums mit übereinstimmenden Werten der fünf anderen Koordinaten entsprechen. Mit anderen Worten: gefragt wird, welche Werte eine bestimmte der sechs pädagogischen Variablen annehmen kann, wenn die anderen fünf bereits festliegen. Beispielsweise bildet die Didaktik ein Wertequintupel (L, M, P, S, Z), also einen Punkt des didaktischen Unterraums, auf eine Untermenge der Menge aller Lehralgorithmen (also des Wertevorrats von Λ) ab.

Gegenüber den korrespondierenden geisteswissenschaftlich-verstehenden Disziplinen streben die Disziplinen der *kybernetischen* Pädagogik per definitionem die Kalkülisierung als Voraussetzung zuverlässiger und reproduzierbarer Objektivationen (im Sinne von Hermann Schmidt) an. Nennenswerte Anfangserfolge wurden hierbei erreicht für die Variablen L (Weltner), M (Pask, Frank, Klugmann, Křečan, Lehnert), P (Frank, von Cube, Riedel, Eckel, Tollingerová) und Λ (Kelbert, Frank, Lánský, Anschütz, Landa). Die Präzisierung der Variablen Z beschränkte sich bisher auf deren Interpretation als Vektor mit den geforderten Schranken für die Wahrscheinlichkeit möglicher Lehrergebnisse als Komponenten (Frank).

Der entscheidende Fortschritt der hier vorgelegten Untersuchung von Stachowiak (sie wurde erstmals im März 1966 beim 4. Symposion der Gesellschaft für Programmierte Instruktion in Düsseldorf vorgetragen) besteht in der Einführung einer Metrik für die Dimension Z. Im Rahmen der Bemühungen um eine Objektivierung der Didaktik (Frank, Graf, Hilbig) kann eine solche Metrik künftig von großem bildungstechnischem Wert sein.

Im November 1966 Der Schriftleiter

ZUM PROBLEM EINER LOGISCH-SEMANTISCHEN MASSBESTIMMUNG DES LERNERFOLGES

von Herbert Stachowiak, Berlin

1. Problemstellung [1)]

1.1 Didaktische Dimensionen

Ausgegangen wird von der folgenden Unterscheidung von 6 didaktischen Dimensionen [2)]:

1. Psycho-Logik (Psychostruktur des Adressaten),
2. Sozio-Logik (Soziostruktur der Lehrsituation),
3. Medien-Logik (Lehrmittelgegebenheiten),
4. Sach-Logik (Lehrstoff),
5. Teleo-Logik (Lehrziel),
6. Methodo-Logik (Lehrmethode).

1.2 Begriff einer formalen Didaktik

H. Frank [3)] hat diese Dimensionen der Reihe nach als Variable P, S, M, L, Z und Λ aufgefaßt. Er hat ferner in Gestalt von

$$\Lambda = \Lambda\ (P, S, M, L, Z) \qquad (1)^{4)}$$

die allgemeine Form einer Lehralgorithmus-Funktion angegeben und Vorschläge zu deren näherer formal-didaktischer Untersuchung vorgelegt.

Eine etwas andere Darstellung als (1) liefert die ebenfalls von Frank angegebene parametrische Funktionsgestalt

$$\Lambda = \Lambda_{PSML}(Z), \qquad (2)$$

worin Λ eine Funktion lediglich der Lehrziel-Variablen Z ist. Das jeweilige reellzahlige Parameter-Quadrupel [PSML] möge eine (formale) Didaktik im engeren Sinne oder auch eine Subdidaktik genannt werden. Unter einer (formalen) Didaktik werde dann die durch (2) gegebene Ergänzung oder Erweiterung der jeweiligen Subdidaktik verstanden. Zu dieser Erweiterung gehört wesentlich die

Bestimmung der "Variationsbereiche" für Z und für Λ , also die Bestimmung des Vorbereichs der Abbildung Λ und diejenige des Nachbereichs dieser Abbildung.

1.3 Das Problem

Das Lehrziel besteht natürlich, allgemein und verbal formuliert, darin, das Lernsystem oder den Adressaten in vorgegebener Zeit zu mindestens ausreichenden Reaktionen oder Antworten auf bestimmte Eingabewörter oder Fragen zu adaptieren, wobei das Attribut "ausreichend" im Sinne einer nicht zu großen Abweichung der tatsächlichen Adressaten-Antworten von den bestenfalls erwartbaren Antworten verstanden wird. H. Frank stellt zum Problem, wenigstens in einfachsten Modellfällen ein reellzahliges Maß der "Güte" oder Qualität der Adressaten-Antwort zu finden, derart, daß dieses Qualitätsmaß einen größten Wert, etwa 1, genau dann annimmt, wenn die Abweichung der Adressaten-Antwort von der optimalen Antwort den kleinstmöglichen Wert innerhalb eines bestimmten Intervalls reeller Zahlen erreicht, und das Qualitätsmaß umgekehrt einen kleinsten Wert, etwa 0, genau dann annimmt, wenn die genannte Abweichung den größtmöglichen Wert innerhalb jenes Intervalls erreicht. Dabei wird, wiederum nach Frank, zunächst lediglich eine verhältnismäßig noch gut übersehbare Klasse von möglichen Abweichungen der Adressaten-Antworten von den jeweiligen optimalen Antworten betrachtet, nämlich die Klasse derjenigen Abweichungen, die in einer der betreffenden optimalen Antwort gegenüber "zu engen" oder "zu weiten" Antwort bestehen, die sich, etwas präziser gesagt, auf der Linie deduktiver Besonderung einerseits und induktiver Verallgemeinerung andererseits bewegen.

Erweist sich eine Maßbestimmung der oben in erster Näherung intuitiv erläuterten Lernqualität und damit des Lernerfolges als theoretisch und womöglich auch automatentechnisch realisierbar, so dürfte eine Möglichkeit zur Bestimmung des Vorbereichs der Abbildung Λ und damit eine erhöhte Chance zur quantitativen Präzisierung eines adäquaten Begriffs der formalen Didaktik im Sinne von 1.2 gegeben sein.

2. Problembearbeitung

2.1 Vorbemerkung

Da es sich bei den in 1.3 genannten Reaktionen des Lernsystems, also den Adressaten-Antworten, um sprachliche Aussagen oder aber um Informationen handeln soll, die eindeutig in sprachliche Aussagen überführbar sind, und da fernerhin

die zulässigen Abweichungen im Sinne von 1.3 ausschließlich auf der deduktiv-induktiven Linie liegen, wird zur Problembearbeitung die in mathematisch-logischer Gestalt von R. Carnap entwickelte induktive Logik[5]) herangezogen. Diese Logik bewegt sich trotz des für sie zentralen Begriffs der Wahrscheinlichkeit ebenso wie die deduktive mathematische Logik ausschließlich im Bereich "analytischer" und damit gewissermaßen "zeitlos gültiger" Aussagen, ohne sich für empirische Zwecke (etwa für diejenigen der verifikationstheoretischen Hypothesenbestätigung) unfruchtbar zu machen; und die induktive Logik schließt die deduktive Logik, wie weiter unten deutlich werden wird, als Spezialfall in sich ein.

Wegen der Zugrundelegung eines für die folgenden Untersuchungen geeigneten, vollständig übersehbaren Sprachsystems $\mathcal{L}$, in welchem alle hier im Zusammenhang des Lehr-Lern-Systems betrachteten informationellen Entitäten formuliert sind (oder in bezug auf welches alle diese Entitäten als formulierbar vorausgesetzt werden dürfen), wird die Verwendung einer Metasprache bezüglich $\mathcal{L}$ nötig. Diese Metasprache sei (zur Vermeidung von Umständlichkeiten) im vorliegenden Falle das nicht-formalisierte System der deutschen Umgangssprache. In der Metasprache benutzte abkürzende Zeichen dürfen, wo keine besondere Erklärung hinzugefügt wird, als bekannt vorausgesetzt werden. Gelegentlich werden in der Metasprache Zeichen verwendet, die in gleicher (typographischer) Gestalt auch in der Objektsprache $\mathcal{L}$ vorkommen. In allen solchen Fällen treten die Zeichen jedoch in Zusammenhängen auf, die Verwechselungen ausschließen dürften.

2.2 Das Sprachsystem $\mathcal{L}$

Als Objektsprache $\mathcal{L}$ werde eine Logik-Sprache des gewöhnlichen Prädikatenkalküls vorgegeben. $\mathcal{L}$ besitzt im einfachsten Fall, als endliches System $\mathcal{L}_n^\pi$, n Individuenkonstante $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und π einstellige Grundprädikate $P_1, P_2, \ldots, P_\pi$ (der ersten prädikatenlogischen Stufe), und $\mathcal{L}$ besitzt im kompliziertesten Falle (der jedoch bereits die Möglichkeiten der derzeit entwickelten, in 2.13 herangezogenen Theorie der semantischen Information bei weitem überschreitet) als unendliches System $\mathcal{L}_\infty$ unendlich viele Individuenkonstante $a_1, a_2, \ldots$ bei beliebigen Stelligkeiten der endlich vielen Prädikate (der ersten prädikatenlogischen Stufe).

Es ist also vorweg zu bemerken, daß die hier zugrunde gelegten Objektsprachen als Kommunikationsmedien der betrachteten Lehr-Lern-Systeme an Ausdrucksmöglichkeiten sehr viel ärmer sind als diejenigen Sprachen, in denen für gewöhnlich die Aussagen tatsächlicher Lehr-Lern-Systeme formuliert werden.

Die folgenden Überlegungen stützen sich ausschließlich auf das Sprachsystem $\mathcal{L}_n^\pi$. Ihre Ausdehnbarkeit auf $\mathcal{L}_\infty$ oder auch nur auf endliche Systeme mit Prädikaten beliebiger Stelligkeit wird in der vorliegenden Untersuchung nicht erörtert.

2.3 Logische Grundbegriffe[6)]

Es folgen einige grundlegende Festsetzungen und Erklärungen:

(3) "L" als Präfix bedeutet stets "deduktiv-logisch" im Sinne der zweistelligen deduktiven (mathematischen) Logik.

(4) Ein Grundprädikat ist ein nicht L-verknüpftes Prädikat (im Unterschied zum Molekularprädikat, vgl. 2.8).

(5) Ein Atomsatz ist die Aussage, daß ein Grundprädikat einem Individuum zukommt, z.B. P_1a_3.

(6) Ein Basissatz ist ein Atomsatz oder dessen Negation.

(7) Ein Molekülsatz ist ein Atomsatz oder ein Ausdruck, der durch endlich oftmalige, sonst jedoch beliebige L-Verknüpfung (Negation $\sim$, Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$, Implikation $\curvearrowright$, Äquivalenz $\curvearrowleftright$) von Atomsätzen entstanden ist, z.B. $P_1a_1 \wedge \sim P_1a_2$.

(8) Ein Einzelsatz ist ein Molekülsatz oder eine Individuenidentität, d. i. eine Identitätsbeziehung zwischen Individuen von $\mathcal{L}_n^\pi$.

(9) Eine Satzformel ist ein Ausdruck, der aus einem Molekülsatz dadurch entsteht, daß wenigstens eine Individuenkonstante durch eine freie Variable ersetzt wird.

(10) Ein Einzelfall ist ein Einzelsatz, der aus einer Satzformel dadurch entsteht, daß alle freien Variablen derselben durch Individuenkonstante ersetzt werden.

(11) Eine Tautologie ist eine immer, d.h. bei jeder Variablenbelegung, L-wahre Satzformel (vgl. hierzu auch (19)).

(12) Ein Allsatz ist ein Ausdruck, der aus einer Satzformel dadurch entsteht, daß wenigstens eine der Individuenvariablen durch den Allquantor ($\forall$) gebunden wird.

(13) Ein Satz ist ein Einzelsatz oder eine Tautologie oder ein Allsatz.

2.4 Induktiv-logische Grundbegriffe

Mit Hilfe der Bestimmungen von 2.3 läßt sich weiter für die Zwecke der induktiven Logik definieren:

(14) Eine Zustandsbeschreibung ist eine aus $n \cdot \pi$ Gliedern bestehende Konjunktion, deren jedes Glied entweder ein Atomsatz oder seine Negation ist (die Konjunktion darf also keine Komponente besitzen, die nicht ein Basissatz von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ ist, und es darf nicht ein Atomsatz zusammen mit seinem Negat in der Konjunktion vorkommen), z. B. für ein Sprachsystem $\mathcal{L}_2^3$ mit a_1, a_2 als Individuenkonstante und P_1, P_2, P_3 als Grundprädikate:

$$P_1a_1 \wedge \sim P_2a_1 \wedge P_3a_1 \wedge \sim P_1a_2 \wedge \sim P_2a_2 \wedge P_3a_2.$$

(15) Der Satz i (abkürzend für $\mathfrak{S}_i$) gilt in der Zustandsbeschreibung $\mathfrak{Z}$ genau dann, wenn

(a) i ist ein Atomsatz und i gehört zu $\mathfrak{Z}$, d. h. kommt als konjunktive Komponente in $\mathfrak{Z}$ vor, oder

(b) i ist eine Tautologie oder

(c) i ist eine Individuenidentität oder

(d) i ist von der Form $\sim$j und j ist ein nicht zu $\mathfrak{Z}$ gehörender Atomsatz oder

(e) i ist von der Form j $\vee$ k und j, k sind Basissätze und mindestens einer dieser Sätze j, k gilt in $\mathfrak{Z}$ oder

(f) i ist von der Form j $\wedge$ k und j, k sind Basissätze und sowohl j als auch k gelten in $\mathfrak{Z}$ oder

(g) i ist von der Form $\forall a_k \mathfrak{M}_j$ (eines Allsatzes) und jeder Einzelfall von $\mathfrak{M}_j$ gilt in $\mathfrak{Z}$

(16) Der logische Spielraum $\mathfrak{R}_i$ des Satzes i ist die Klasse der Zustandsbeschreibungen, in denen i gilt.

Die Fruchtbarkeit des Begriffs der Zustandsbeschreibung wird deutlich, wenn man festhält, daß mittels dieses Begriffs der Begriff der Bedeutung eines Satzes präzisierbar wird. Diese Satzbedeutung kann extensional durch Angabe der Gesamtheit der möglichen Fälle, in denen der Satz gilt, bestimmt werden. Explikat des Begriffs der Satzbedeutung ist dann der logische Spielraum des Satzes.

Verabredet man weiter, mit

(17) $\oplus$ die Klasse aller Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_n^{\pi}$

und mit

(18) $\ominus$ die Nullklasse

zu bezeichnen, so läßt sich bequem festsetzen:

(19) i ist L-wahr genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i = \oplus$

(20) i ist L-falsch genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i = \ominus$.

(21) i L-impliziert j genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i \subset \mathfrak{R}_j$.

(22) i ist L-äquivalent j genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_j$.

(23) i und j sind L-disjunkt zueinander genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i \cup \mathfrak{R}_j = \oplus$ (entsprechend für mehr als zwei Sätze).

(24) i ist L-unverträglich mit j genau dann, wenn $\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}_j = \ominus$.

(25) i ist L-determiniert genau dann, wenn i entweder L-wahr oder L-falsch ist.

(26) i ist faktisch genau dann, wenn i nicht L-determiniert ist.

2.5 Maßfunktionen der induktiven Logik

Die folgenden Definitionen Carnaps führen zu Maßfunktionen für einzelne $\mathcal{L}_n^{\pi}$-Sätze bzw. für Paare von Sätzen, die miteinander "induktiv korrespondieren".

(27) m ($\cdot$)[7] ist eine reguläre Maßfunktion für Zustandsbeschreibungen genau dann, wenn für jede Zustandsbeschreibung $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ gilt: m($\mathfrak{Z}_i$) ist eine positive reelle Zahl, und die Summe aller Funktionswerte m($\mathfrak{Z}$) für die sämtlichen $\mathfrak{Z}$ von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ ist gleich 1.

m($\cdot$) ist ersichtlich als Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge aller Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ interpretierbar.

(28) m($\cdot$) ist eine reguläre Maßfunktion für Sätze genau dann, wenn gilt:

(a) m($\cdot$) ist eine reguläre Maßfunktion für Zustandsbeschreibungen und

(b) es ist m(j) = 0, wenn j ein L-falscher Satz ist, und

(c) es ist m(j) gleich der Summe der m-Werte für die Zustandsbeschreibungen in $\mathfrak{R}_j$, wenn j ein nicht L-falscher Satz ist.

(29) $c(\cdot,\cdot)$ ist eine reguläre Bestätigungsfunktion für einen Satz j bezüglich eines Satzes i, kurz: eine reguläre c-Funktion von j, i, genau dann, wenn

$$c = c(j,i) = \frac{m(i \wedge j)}{m(i)} = r$$

für $m(i) \neq 0$, während für $m(i) = 0$ die Funktion keinen Wert besitzt.

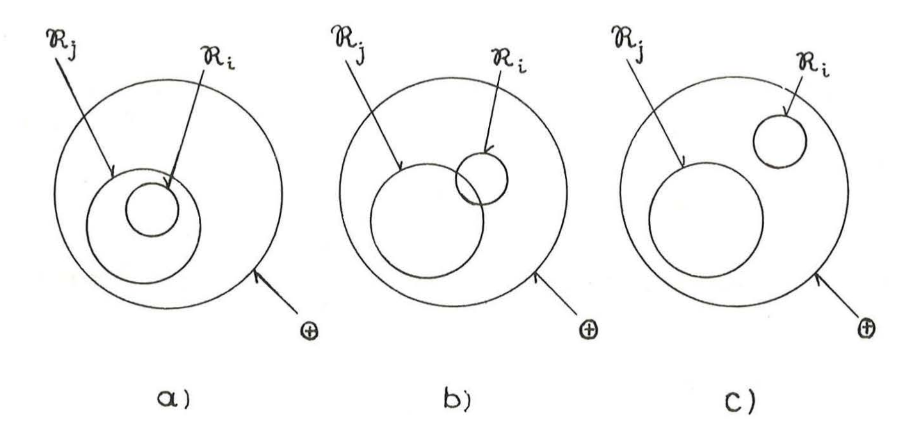
Faßt man m(i) als Maß des logischen Spielraumes $\mathcal{R}_i$ von i auf und $m(i \wedge j)$ als Maß des logischen Spielraumes $\mathcal{R}_{i \wedge j}$ von $i \wedge j$, so gibt es die drei folgenden Möglichkeiten:

(a) i L-impliziert j. Dann ist $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}_j$, mithin $\mathcal{R}_{i \wedge j} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \mathcal{R}_i$.

(b) Es gilt nicht, daß i L-impliziert j, und es sei auch nicht i L-unverträglich mit j. Dann ist $\mathcal{R}_{i \wedge j} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j \subset \mathcal{R}_j \subset \oplus$.

(c) Es gilt nicht, daß i L-impliziert j, und zwar ist i L-unverträglich mit j. Dann ist $\mathcal{R}_{i \wedge j} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \Theta$.

Die Abb. 1 a, b, c mögen die drei Möglichkeiten veranschaulichen:



a) b) c)

Abb. 1

Den rigorosen deduktiv-logischen Alternativen "i L-impliziert j" einerseits und "Es gilt nicht, daß i L-impliziert j" andererseits steht die induktiv-logische Differenzierung gegenüber: die zweite deduktiv-logische Alternative wird in einen Verträglichkeits- und einen Unverträglichkeitsfall zerlegt und der erstere "aufgefächert" in eine Mannigfaltigkeit von Graduierungen.

2.6 Das Beispiel $\mathcal{L}_2^3$.

Um die bisher entwickelten Begriffe an einem einfachen Beispiel zu verdeutlichen, soll das schon zu Beginn von 2.4 erwähnte Sprachsystem $\mathcal{L}_2^3$ erneut herangezogen werden.

In $\mathcal{L}_2^3$ gibt es die folgenden $n \cdot \pi = 2 \cdot 3 = 6$ Atomsätze:

$$P_1a_1,\ P_2a_1,\ P_3a_1,\ P_1a_2,\ P_2a_2,\ P_3a_2,$$

die der Reihe nach mit

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_6$$

bezeichnet werden mögen. Ferner gibt es in $\mathcal{L}_2^3$ die folgenden $2 \cdot n \cdot \pi$ Basissätze:

$$P_1a_1,\ \sim P_1a_1,\quad P_2a_1,\ \sim P_2a_1,\ P_3a_1,\ \sim P_3a_1,$$

$$P_1a_2,\ \sim P_1a_2,\quad P_2a_2,\ \sim P_2a_2,\ P_3a_2,\ \sim P_3a_2.$$

Die Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_2^3$ haben sämtlich die Länge (Anzahl der Konjunktionsglieder) $n \cdot \pi = 6$. Die Gesamtzahl ζ dieser Zustandsbeschreibungen ist

$$\zeta = 2^{(n \cdot \pi)} = 2^{(2 \cdot 3)} = 2^6 = 64.$$

Um das Gesamtrepertoire der Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_2^3$ bequem aufschreiben zu können, soll in

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

und allen übrigen Zustandsbeschreibungen vereinfachend das Zeichen " $\wedge$ " fortgelassen und $\alpha_i = i$ sowie $\sim\alpha_i = i'$ gesetzt werden. Dann ergibt sich insgesamt die Aufstellung gemäß Tab. 1, durchnumeriert von 1. bis 64..

Im folgenden sollen einige logische Spielräume aufgebaut werden. Hierzu mögen die in Tab. 2 aufgeschriebenen Sätze $i_1, \ldots, i_{12}$ als Beispielsätze zugrundegelegt werden. Dann ergeben sich (in der Numerierung von Tab. 1) der Reihe nach

1. 1 2 3 4 5 6
2. 1´2 3 4 5 6
3. 1 2´3 4 5 6
4. 1 2 3´4 5 6
5. 1 2 3 4´5 6
6. 1 2 3 4 5´6
7. 1 2 3 4 5 6´
8. 1´2´3 4 5 6
9. 1´2 3´4 5 6
10. 1´2 3 4´5 6
11. 1´2 3 4 5´6
12. 1´2 3 4 5 6´
13. 1 2´3´4 5 6
14. 1 2´3 4´5 6
15. 1 2´3 4 5´6
16. 1 2´3 4 5 6´
17. 1 2 3´4´5 6
18. 1 2 3´4 5´6
19. 1 2 3´4 5 6´
20. 1 2 3 4´5´6
21. 1 2 3 4´5 6´
22. 1 2 3 4 5´6´
23. 1´2´3´4 5 6
24. 1´2´3 4´5 6
25. 1´2´3 4 5´6
26. 1´2´3 4 5 6´
27. 1´2 3´4´5 6
28. 1´2 3´4 5´6
29. 1´2 3´4 5 6´
30. 1´2 3 4´5´6
31. 1´2 3 4´5 6´
32. 1´2 3 4 5´6´
33. 1 2´3´4´5 6
34. 1 2´3´4 5´6
35. 1 2´3´4 5 6´
36. 1 2´3 4´5´6
37. 1 2´3 4´5 6´
38. 1 2´3 4 5´6´
39. 1 2 3´4´5´6
40. 1 2 3´4´5 6´
41. 1 2 3´4 5´6´
42. 1 2 3 4´5´6´
43. 1´2´3´4´5 6
44. 1´2´3´4 5´6
45. 1´2´3´4 5 6´
46. 1´2´3 4´5´6
47. 1´2´3 4´5 6´
48. 1´2´3 4 5´6´
49. 1´2 3´4´5´6
50. 1´2 3´4´5 6´
51. 1´2 3´4 5´6´
52. 1´2 3 4´5´6´
53. 1 2´3´4´5´6
54. 1 2´3´4´5 6´
55. 1 2´3´4 5´6´
56. 1 2´3 4´5´6´
57. 1 2 3´4´5´6´
58. 1´2´3´4´5´6
59. 1´2´3´4´5 6´
60. 1´2´3´4 5´6´
61. 1´2´3 4´5´6´
62. 1´2 3´4´5´6´
63. 1 2´3´4´5´6´
64. 1´2´3´4´5´6´

Tabelle 1

$i_1 = \sim P_1 a_1 \qquad = 1'$

$i_2 = P_3 a_1 \wedge \sim P_3 a_2 \qquad = 3\ 6'$

$i_3 = P_2 a_1 \wedge \sim P_3 a_1 \wedge P_2 a_2 \qquad = 2\ 3'5$

$i_4 = \sim P_2 a_1 \wedge P_3 a_1 \wedge \sim P_3 a_2 \qquad = 2'3\ 6'$

$i_5 = P_1 a_1 \qquad = 1$

$i_6 = \sim P_3 a_1 \wedge P_3 a_2 \qquad = 3'6$

$i_7 = P_1 a_1 \wedge \sim P_3 a_1 \wedge \sim P_2 a_2 \qquad = 1\ 3'5'$

$i_8 = P_2 a_1 \wedge P_1 a_2 \wedge \sim P_2 a_2 \wedge P_3 a_2 \qquad = 2\ 4\ 5'6$

$i_9 = P_1 a_1 \wedge P_2 a_1 \wedge P_1 a_2 \wedge \sim P_2 a_2 \wedge P_3 a_2 \qquad = 1\ 2\ 4\ 5'6$

$i_{10} = P_1 a_1 \wedge P_2 a_1 \wedge \sim P_3 a_1 \wedge P_1 a_2 \wedge \sim P_2 a_2 \wedge P_3 a_2 \qquad = 1\ 2\ 3'4\ 5'6$

$i_{11} = \sim P_3 a_2 \wedge P_3 a_2 \qquad = 6'6$

$i_{12} = P_2 a_1 \vee \sim P_2 a_1 .$

Tabelle 2

die zugehörigen Spielräume wie folgt:

$\mathfrak{R}_{i_1} =$ (2, 8, 9, 10, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 58, 59, 60, 61, 62, 64) mit 32 Elementen,

$\mathfrak{R}_{i_2} =$ (7, 12, 16, 21, 22, 26, 31, 32, 37, 38, 42, 47, 48, 52, 56, 61) mit 16 Elementen,

$\mathfrak{R}_{i_3} =$ (4, 9, 17, 19, 27, 29, 40, 50) mit 8 Elementen,

$\mathfrak{R}_{i_4} =$ (16, 26, 37, 38, 47, 48, 56, 61) mit 8 Elementen,

$\mathfrak{R}_{i_5} =$ (1, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 53, 54, 55, 56, 57, 63) mit 32 Elementen,

$\mathcal{R}_{i_6}$ = (4, 9, 13, 17, 18, 23, 27, 28, 33, 34, 39, 43, 44, 49, 53, 58)
mit 16 Elementen,

$\mathcal{R}_{i_7}$ = (18, 34, 39, 41, 53, 55, 57, 63)
mit 8 Elementen,

$\mathcal{R}_{i_8}$ = (6, 11, 18, 28)
mit 4 Elementen,

$\mathcal{R}_{i_9}$ = (6, 18)
mit 2 Elementen,

$\mathcal{R}_{i_{10}}$ = (18)
mit 1 Element,

$\mathcal{R}_{i_{11}} = \ominus$ mit keinem Element und

$\mathcal{R}_{i_{12}} = \oplus$ mit allen 64 Elementen.

Hieraus lassen sich u. a. die folgenden Relationen gewinnen:

$$\mathcal{R}_{i_1 \wedge i_5} = \mathcal{R}_{i_1} \cap \mathcal{R}_{i_5} = \ominus, \quad \mathcal{R}_{i_1} \cup \mathcal{R}_{i_5} = \oplus,$$

$$\mathcal{R}_{i_1 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_1} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_2 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_2} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \ominus,$$

$$\mathcal{R}_{i_5 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_5} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}, \quad \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_5},$$

$$\mathcal{R}_{i_6 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_6} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}, \quad \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_6},$$

$$\mathcal{R}_{i_7 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_7} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}, \quad \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_7},$$

$$\mathcal{R}_{i_8 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_8} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}, \quad \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_8},$$

$$\mathcal{R}_{i_9 \wedge i_{10}} = \mathcal{R}_{i_9} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}, \quad \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_9},$$

$$\ominus = \mathcal{R}_{i_{11}} \subset \mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_9} \subset \mathcal{R}_{i_8} \subset \mathcal{R}_{i_{12}} = \oplus$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es unter den aus $i_1, \ldots, i_{12}$ bildbaren Satzkonjunktionen auch solche gibt, deren logische Spielräume weder mit $\ominus$ oder $\oplus$ noch mit einem der logischen Spielräume $\mathcal{R}_{i_1}, \ldots, \mathcal{R}_{i_{10}}$ identisch sind, z. B.

$$\mathcal{R}_{i_1 \wedge i_8} = \mathcal{R}_{i_1} \cap \mathcal{R}_{i_8} = (11,28) \neq \mathcal{R}_{i_1}, \ldots, \mathcal{R}_{i_{12}}.$$

2.7 Die "Gleichverteilungsfunktion"

In den folgenden fünf Unterabschnitten werden die Möglichkeiten erörtert, die oben eingeführten Maßfunktionen $m(\cdot)$ und $c(\cdot,\cdot)$ für konkrete numerische Berechnungen zu bestimmen.

Zunächst dürfte sich eine Gleichverteilung der Maßwerte der m-Funktion derart anbieten, daß jede Zustandsbeschreibung von $\mathcal{L}_n^\pi$ mit dem gleichen Wert belegt wird, wahrscheinlichkeitstheoretisch ausgedrückt, also alle Zustandsbeschreibungen für gleichwahrscheinlich erklärt werden. Diese "Gleichverteilungsfunktion" werde mit $m'(\cdot)$ bezeichnet. Die Wahl von $m'(\cdot)$ hätte allerdings die folgenden, von Carnap und Stegmüller hervorgehobenen Konsequenzen.

Sei wieder (wie in 2.6, jetzt aber für beliebige $\mathcal{L}_n^\pi$) mit ζ die Gesamtzahl der Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_n^\pi$ bezeichnet; dann ist also für alle Zustandsbeschreibungen $\mathfrak{z}_i$:

$$m'(\mathfrak{z}_i) = \frac{1}{\zeta}.$$

Für ein Sprachsystem $\mathcal{L}_{1001}^1$ beispielsweise (mit den Individuenkonstanten $a_1, \ldots, a_{1001}$ und dem Grundprädikat P) mag sein:

$$i_0 = Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge \ldots \wedge Pa_{1000} \quad \text{und} \quad j_0 = Pa_{1001}.$$

$i_0 \wedge j_0$ einerseits und $i_0 \wedge \sim j_0$ andererseits sind zwei miteinander L-unverträgliche Zustandsbeschreibungen in $\mathcal{L}_{1001}^1$. Allgemein gelten nun die Beziehungen

[1] $$[(i \wedge j) \vee (i \wedge \sim j)] \leftrightarrow i$$

und

[2] $$m(i \vee j) = m(i) + m(j) - m(i \wedge j),$$

wobei für den hier vorliegenden Fall der L-Unverträglichkeit von $i = i_0 \wedge j_0$ mit $j = i_0 \wedge \sim j_0$ das Glied $-m(i \wedge j)$ verschwindet, so daß folgt:

$$m'(i) = m'[(i \wedge j) \vee (i \wedge \sim j)] = m'(i \wedge j) + m'(i \wedge \sim j) = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} = \frac{2}{\zeta}.$$

Ferner gilt, da $i = i_0 \wedge j_0$ eine Zustandsbeschreibung ist:

$$m'(i_0 \wedge j_0) = \frac{1}{\varsigma} .$$

Es folgt mithin für eine aus $m'(\cdot)$ aufgebaute c-Funktion, die mit $c'(\cdot,\cdot)$ bezeichnet werde, gemäß (29) in 2.5:

$$c'(j_0, i_0) = \frac{1}{2} ,$$

ein konstanter Wert also, der unabhängig davon ist, ob i_0 wie festgesetzt beibehalten oder durch Negation beliebig vieler Glieder geändert wird. $m'(\cdot)$ ist ersichtlich eine Maßfunktion, die sicher dann untragbar ist, wenn sie den induktiv-logischen Bestätigungsgrad für j_0 (als Hypothese) bezüglich i_0 (als Prämisse) zu berechnen gestatten soll. Denn es kann nicht gleichgültig für die Bestätigung von j_0 auf Grund von i_0 sein, ob die "induktive Vorgabe" 1000 gleichartige Fälle oder nur einen Fall (oder gar keinen) umfaßt.

Da jedoch die in den Unterabschnitten 2.14 bis 2.16 angestellten Überlegungen zur Problembearbeitung nicht bestätigungstheoretischer Art sind, mag die "Gleichverteilungsfunktion" als mögliche m-Funktion im Sinne der vorliegenden Untersuchung gelten dürfen.

2.8 Die λ-Funktionen

R. Carnap konstruiert eine auch den Zwecken der Bestätigungstheorie entsprechende Maßfunktion $m(\cdot) \neq m'(\cdot)$[8], von welcher $m'(\cdot)$ indes als ein durch Extremalisierung gewonnener Spezialfall betrachtet werden kann. Diese Maßfunktion soll in ihren beiden Hauptversionen referiert werden. An den Anfang sei die λ-Version der m-Funktion gestellt; sie lautet:

$$[3]^{9)} \qquad m_\lambda(k) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ n_i > 0}}^{\mu} \left[\frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} + n_i - 1 \right) \right]}{\lambda \cdot (\lambda + 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda + n - 1)}$$

Zeichenerklärung und zusätzliche Bemerkungen:

k : eine Zustandsbeschreibung in $\mathcal{L}_n^\pi$.

$\mu : 2^\pi$.

μ ist ein rein logischer (nicht-empirischer) Parameter, der die Anzahl der sogenannten Q-Prädikate von $\mathcal{L}_n^\pi$ beschreibt.

(30) Ein Q-Prädikat ist entweder das Molekularprädikat[10] $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_\pi$ oder ein Molekularprädikat, das aus P dadurch gewonnen wird, daß beliebige P_ν durch $\sim P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \pi)$ ersetzt werden.

Die Gesamtheit der Q-Prädikate ist also identisch mit der Gesamtheit aller in $\mathcal{L}_n^\pi$ darstellbaren, überhaupt logisch (nicht empirisch) möglichen Eigenschaftsbelegungen von $\mathcal{L}_n^\pi$-Individuen.

n : Die Gesamtzahl der Individuen von $\mathcal{L}_n^\pi$ (in Übereinstimmung mit der bisherigen Bezeichnungsweise).

n_i : die (von Null verschiedene) Anzahl derjenigen Individuen von $\mathcal{L}_n^\pi$, auf die das Q-Prädikat Q_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ zutrifft.

Jeder Zustandsbeschreibung k kommt eine bestimmte Verteilung $(n_1, \ldots, n_\mu)$ von Q-Zahlen zu. Zur Bestimmung dieser Q-Zahlen geht man der Reihe nach alle $\mu = 2^\pi$ Q-Prädikate durch und stellt jeweils die Zahl der Individuen fest, für die das gerade betrachtete Q-Prädikat gilt.

λ : ein freier Parameter mit $0 < \lambda < \infty$.

2.9 Erste Fortsetzung des Beispiels von 2.6

Im folgenden soll für die 64 Zustandsbeschreibungen von Tab. 1 in 2.6 das Maß sowohl zunächst nach der "Gleichverteilungsfunktion" $m'(k_\nu)$ aufgeschrieben als auch nach der λ-Funktion $m_\lambda(k_\nu)$ speziell für $\lambda = 1$ berechnet werden, wo k_ν für $\nu = 1, \ldots, 64$ abkürzend für die 1. bis 64. Zustandsbeschreibung von Tab. 1 gesetzt wird. Die Gleichverteilung liefert einfach

$$m'(k_\nu) = \frac{1}{64} \quad \text{für alle Zustandsbeschreibungen von } \mathcal{L}_n^\pi, \text{ also für } \nu = 1, \ldots, 64.$$

Im Falle $m_\lambda(\cdot)$ ergibt sich für alle k_ν: $n = 2$ und $\mu = 2^\pi = 8$. Mithin spezialisiert sich [3] auf

$$m_\lambda(k_\nu) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ n_i > 0}}^{8} \left[\frac{\lambda}{8} \left(\frac{\lambda}{8} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{8} + n_i - 1\right) \right]}{\lambda \cdot (\lambda + 1)}$$

Die sämtlichen Q-Prädikate (vgl. (30)) von $\mathcal{L}_2^3$ sind:

$Q_1 = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ $\quad$ $Q_5 = \sim P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$

$Q_2 = P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3$ $\quad$ $Q_6 = \sim P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3$

$Q_3 = P_1 \wedge \sim P_2 \wedge P_3$ $\quad$ $Q_7 = \sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge P_3$

$Q_4 = P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \sim P_3$ $\quad$ $Q_8 = \sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \sim P_3$

Tabelle 3

Zu 1. (gemäß Tab. 1):

Q_1 trifft auf beide Individuen, a_1 und a_2, zu, die übrigen Q_ν treffen auf keines der Individuen zu. Es folgt also $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8) = (2,0,0,0,0,0,0,0)$. Mithin ist

$$m_\lambda(k_1) = \frac{\frac{\lambda}{8}\cdot(\frac{\lambda}{8}+1)}{\lambda\cdot(\lambda+1)} = \frac{\lambda+8}{64\ (\lambda+1)} ,$$

speziell für $\lambda = 1$: $m_1(k_1) = \frac{9}{128}$.

Zu 2.:

Hier trifft genau Q_1 auf a_2 und Q_5 auf a_1 zu, dagegen treffen die übrigen Q_ν auf keines der beiden Individuen zu. Folglich ist $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8) = (1,0,0,0,1,0,0,0)$, so daß sich ergibt:

$$m_\lambda(k_2) = \frac{\frac{\lambda}{8}\cdot\frac{\lambda}{8}}{\lambda\cdot(\lambda+1)} = \frac{\lambda}{64\cdot(\lambda+1)} ,$$

speziell für $\lambda = 1$: $m_1(k_2) = \frac{1}{128}$.

Man überlegt sich leicht, daß es für die Zustandsbeschreibungen in $\mathcal{L}_2^3$ nur die beiden eben berechneten Maße bzw. deren Spezialisierungen für $\lambda = 1$ gibt, und zwar ist gemäß Tab. 1:

$$m_\lambda(k_\nu) = \begin{cases} \dfrac{\lambda + 8}{64\cdot(\lambda+1)} & \text{für } \nu = 1, 10, 15, 19, 46, 50, 55, 64, \\[2ex] \dfrac{\lambda}{64\cdot(\lambda+1)} & \text{für alle übrigen Zustandsbeschreibungen von } \mathcal{L}_2^3. \end{cases}$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich dementsprechend

$$m_1(k_\nu) = \begin{cases} \dfrac{9}{128} & \text{für } = 1, 10, 15, 19, 46, 50, 55, 64, \\[2ex] \dfrac{1}{128} & \text{für alle übrigen Zustandsbeschreibungen von } \mathcal{L}_2^3. \end{cases}$$

Um weiter für einen nicht L-falschen Satz i das Maß $m'(i)$ bzw. $m_\lambda(i)$ zu ermitteln, muß nach (28) von 2.5 zunächst die Gesamtheit der Zustandsbeschreibungen, in denen i gilt, bestimmt werden. Danach ist für jede dieser Zustandsbeschreibungen das Maß zu berechnen bzw. aufzusuchen, und schließlich ist die Summe aller dieser Maße zu bilden, die das Maß von i liefert. Im folgenden werden erneut die Sätze $i_1, \ldots, i_{12}$ von Tab. 2 in 2.6 als Beispiele herangezogen.

Als erstes sei mit Tab. 4 die Maßtabelle für $m'(\cdot)$ aufgeschrieben:

$m'(i_1) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$	$m'(i_7) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$
$m'(i_2) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	$m'(i_8) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$
$m'(i_3) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	$m'(i_9) = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$
$m'(i_4) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	$m'(i_{10}) = \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$
$m'(i_5) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$	$m'(i_{11}) = \frac{0}{64} = 0$
$m'(i_6) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	$m'(i_{12}) = \frac{64}{64} = 1$

Tabelle 4

Bezüglich $m_1(\cdot)$ berechnet man leicht:

$$m_1(i_1) = 4 \cdot \frac{9}{128} + 28 \cdot \frac{1}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2},$$

$$m_1(i_2) = 16 \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{8},$$

usw., wobei wieder von Tab. 1 und den logischen Spielräumen von $i_1, \ldots, i_{12}$ auszugehen ist. Insgesamt ergibt sich die Übersicht von Tab. 5:

$m_1(i_1) = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$	$m_1(i_7) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$
$m_1(i_2) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$	$m_1(i_8) = \frac{4}{128} = \frac{1}{32}$
$m_1(i_3) = \frac{24}{128} = \frac{3}{16}$	$m_1(i_9) = \frac{2}{128} = \frac{1}{64}$
$m_1(i_4) = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$	$m_1(i_{10}) = \frac{1}{128} = \frac{1}{128}$
$m_1(i_5) = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$	$m_1(i_{11}) = \frac{0}{128} = 0$
$m_1(i_6) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$	$m_1(i_{12}) = \frac{128}{128} = 1$

Tabelle 5

Es ist also

$$\begin{aligned} 0 &= m'(i_{11}) < m'(i_{10}) < m'(i_9) < m'(i_8) < m'(i_7) \\ &= m'(i_4) = m'(i_3) < m'(i_6) = m'(i_2) < m'(i_5) = m'(i_1) < m'(i_{12}) = 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= m_1(i_{11}) < m_1(i_{10}) < m_1(i_9) < m_1(i_8) < m_1(i_4) < m_1(i_7) \\ &= m_1(i_6) = m_1(i_2) < m_1(i_3) < m_1(i_5) = m_1(i_1) < m_1(i_{12}) = 1 . \end{aligned}$$

Die Maßverteilungen von Tab. 4 bzw. 5 lassen sich in der Tat derart interpretieren, daß sie die Wahrscheinlichkeit (nicht nur im logisch-semantischen Sinne, sondern auch als relative Häufigkeit) wiedergeben, mit der aus dem Gesamtrepertoire der Sätze von $\mathcal{L}_2^3$ ein Satz mit bestimmtem logischen Spielraum herausgegriffen werden kann

Will man im Sinne der Bestätigungstheorie Carnaps einen $\mathcal{L}_n^{\pi}$-Satz j in bestätigungstheoretischen Zusammenhang mit einem $\mathcal{L}_n^{\pi}$-Satz i bringen, nämlich den Bestätigungsgrad von j bezüglich i bestimmen, so ist die Formel von (29) in 2.5 mit i als "Prämisse" und j als "Hypothese" anzuwenden. Für $\mathcal{L}_2^3$ und einige beliebig herausgegriffene Paar-Relationen aus der Menge der Beispiel-Sätze $i_1, \ldots, i_{12}$ ergeben sich etwa die nachfolgenden Bestätigungsgrade, wobei als m-Funktion lediglich $m_1(\cdot)$ verwendet und die auf $m_1(\cdot)$ bezogene c-Funktion mit $c_1(\cdot, \cdot)$ bezeichnet werden soll.

Da z. B. i_{10} L-impliziert i_9, müßte $c_1(i_9, i_{10})$ den größtmöglichen Wert, nämlich 1, ergeben. Dies ist tatsächlich der Fall, denn es ist nach den entsprechenden Relationen von 2. 6:

$$\mathcal{R}_{i_{10}} \subset \mathcal{R}_{i_9} \quad (\text{und } \mathcal{R}_{i_9} \cap \mathcal{R}_{i_{10}} = \mathcal{R}_{i_{10}}),$$

mithin $m_1(i_{10} \wedge i_9) = m_1(i_{10})$ und folglich

$$c_1(i_9, i_{10}) = \frac{m_1(i_{10} \wedge i_9)}{m_1(i_{10})} = \frac{m_1(i_{10})}{m_1(i_{10})} = 1,$$

und zwar, wie man sieht, unabhändig von der besonderen Wahl der m-Funktion.

Will man dagegen etwa umgekehrt i_{10} auf Grund von i_9 bestätigen, so ist

$$c_1(i_{10}, i_9) = \frac{m_1(i_9 \wedge i_{10})}{m_1(i_9)} = \frac{m_1(i_{10})}{m_1(i_9)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2} .$$

Man erwartet vom Standpunkt "intuitiver Induktion"[11] aus eine wesentlich schlechtere Bestätigung etwa des Satzes i_{10} auf Grund des Satzes i_5. In der Tat ergibt sich

$$c_1(i_{10}, i_5) = \frac{m_1(i_5 \wedge i_{10})}{m_1(i_5)} = \frac{m_1(i_{10})}{m_1(i_5)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64} .$$

Dementsprechend müßte die Bestätigung von i_{10} auf Grund von i_7 einen Wert

zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{64}$ liefern. Auch dies leistet die c_1-Funktion:

$$c_1(i_{10}, i_7) = \frac{m_1(i_7 \wedge i_{10})}{m_1(i_7)} = \frac{m_1(i_{10})}{m_1(i_7)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{16} .$$

Ferner ergibt die Rechnung, daß die Bestätigungsfunktion für zwei Sätze, deren logische Spielräume einen leeren Durchschnitt haben, den Wert Null annimmt. Auch dies entspricht durchaus den intuitiven Erwartungen.

Die λ-Version der erörterten Maßfunktion Carnaps läßt sich unter gewissen Limeskonventionen für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ extremalisieren. Im ersten Fall, $m_\infty(\cdot)$, resultiert die schon betrachtete (vgl. 2. 7) "Gleichverteilungsfunktion":

$$[4] \qquad m_\infty(k) = m^{\prime}(k) = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\mu^n}$$

mit den bereits dargelegten induktionslogischen Konsequenzen. Der zweite Fall, $m_0(\cdot)$, führt zu dem wenig nützlichen Resultat $m_0(k) = 0$ für alle Zustandsbeschreibungen k, deren Individuen nicht ein und dasselbe Q-Prädikat zukommt. Man wird sich also im allgemeinen für einen mittleren λ-Wert entscheiden, wenn eine leistungsfähige c-Funktion aufgebaut werden soll.

2. 10 Die μ-Funktion

Für $\lambda = \lambda(\mu)$ und speziell $\lambda = \mu$ erhält man Carnaps μ-Version der Maßfunktion für Zustandsbeschreibungen:

$$[5] \qquad m^*(k) = \frac{(\mu - 1)!}{(n + \mu - 1)!} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ n_i > 0}}^{\mu} n_i ! .$$

2. 11 Zweite Fortsetzung des Beispiels von 2. 6

Um einige Beispiele von m^*-Werten den entsprechenden m_1-Werten zunächst für Zustandsbeschreibungen und dann für Sätze von $\mathcal{L}_2^3$ gegenüberzustellen, sollen wieder die Tab. 1 und 2 von 2. 6 zugrundegelegt werden.

Zu 1.:
Da die Q_i-Zahlen n_i nicht von der Wahl der m-Funktion abhängen, ist wieder

$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8) = (2,0,0,0,0,0,0,0)$ und mithin unter Verwendung der in 2.9 getroffenen Bezeichnungskonvention für k_ν gemäß [5]:

$$m^*(k_1) = \frac{(8-1)!}{(2+8-1)!} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ n_i > 0}}^{8} n_i ! = \frac{1}{72} \cdot 2! = \frac{1}{36} .$$

Zu 2.:

Wegen $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8) = (1,0,0,0,1,0,0,0)$ ist

$$m^*(k_2) = \frac{1}{72} \cdot 1! \cdot 1! = \frac{1}{72} .$$

Man sieht, daß es in $\mathcal{L}_2^3$ nur diese beiden m^*-Werte geben kann. Formel [5] gibt ganz allgemein zu erkennen, daß für jedes Sprachsystem $\mathcal{L}_n^\pi$ die m^*-Maße zweier Zustandsbeschreibungen mit gleicher n_i-Verteilung übereinstimmen. Diese Eigenschaft läßt sich mit Hilfe des Carnapschen Begriffs der Strukturbeschreibung allgemeiner formulieren:

Hierzu werden zunächst zwei Zustandsbeschreibungen für miteinander isomorph erklärt, wenn (und nur wenn) sie durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Klasse der Individuenkonstanten von $\mathcal{L}_n^\pi$ auf sich selbst hervorgehen. Man betrachte dann die Disjunktion der sämtlichen zu einer Zustandsbeschreibung $\mathfrak{Z}$ isomorphen Zustandsbeschreibungen, welche die $\mathfrak{Z}$-Struktur-Disjunktion genannt werden möge. Gibt es nun zu einem Satz j von $\mathcal{L}_n^\pi$ ein $\mathfrak{Z}_i$ derart, daß j mit der $\mathfrak{Z}_i$-Struktur-Disjunktion identisch ist (natürlich bis auf erlaubte Vertauschungen von Disjunktions- und Konjunktionsgliedern), so heißt j eine Strukturbeschreibung. Die erwähnte Eigenschaft von $m^*(\cdot)$ läßt sich dann dahin formulieren, daß $m^*(\cdot)$ allen Disjunktionsgliedern einer und derselben Strukturbeschreibung den gleichen Wert zuordnet. Diese Überlegungen setzen, wie hier nicht näher ausgeführt wird, voraus, daß es sich bei den m-Funktionen sämtlich um sogenannte symmetrische m-Funktionen handelt, d.h. kurz gesagt um solche, die durch die gleiche Behandlung von isomorphen Zustandsbeschreibungen gekennzeichnet sind.

In $\mathcal{L}_2^3$ ist z.B.

$k_{50} = (\sim P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3)a_1 \wedge (\sim P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3)a_2$ isomorph

$\bar{k}_{50} = (\sim P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3)a_2 \wedge (\sim P_1 \wedge P_2 \wedge \sim P_3)a_1$

mit $(a_1, a_2) \longleftrightarrow (a_2, a_1)$ als eineindeutige ("bijektive") Abbildung der Individuenklasse auf sich selbst. Die k_{50}-Struktur-Disjunktion ist dann die Disjunktion $k_{50} \vee \bar{k}_{50}$. Diese stellt offenbar eine durch die Q-Zahlen (0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0) eindeutig bestimmte Strukturbeschreibung dar mit $m^*(k_{50}) = m^*(\bar{k}_{50})$.

Bezüglich $\mathcal{L}_2^3$ kann jetzt festgestellt werden:

$$m^*(k_\nu) = \begin{cases} \frac{2}{72} = \frac{1}{36} & \text{für } \nu = 1, 10, 15, 19, 46, 50, 55, 64, \\ \frac{1}{72} & \text{für alle übrigen Zustandsbeschreibungen von } \mathcal{L}_2^3 . \end{cases}$$

Man erhält demnach für die Beispielsätze $i_1, \ldots, i_{12}$, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$m^*(i_1) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$		$m^*(i_7) = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}$
$m^*(i_2) = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$		$m^*(i_8) = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$
$m^*(i_3) = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$		$m^*(i_9) = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$
$m^*(i_4) = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$		$m^*(i_{10}) = \frac{1}{72} = \frac{1}{72}$
$m^*(i_5) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$		$m^*(i_{11}) = \frac{0}{72} = 0$
$m^*(i_6) = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$		$m^*(i_{12}) = \frac{72}{72} = 1$

Tabelle 6

Die sich hieraus ergebende Ordnungsverteilung

$$\begin{aligned} 0 = m^*(i_{11}) < m^*(i_{10}) < m^*(i_9) < m^*(i_8) < m^*(i_4) < m^*(i_7) < m^*(i_3) < m^*(i_6) \\ = m^*(i_2) < m^*(i_5) = m^*(i_1) < m^*(i_{12}) = 1 \end{aligned}$$

ist etwas differenzierter als die entsprechende Relation für $m_1(\cdot)$ (und auch für $m'(\cdot)$), sie stimmt jedoch mit jener ungefähr überein. Man wird je nach Bedarf und Operationsziel im Einzelfall einer Untersuchung oder Untersuchungsphase die geeignet scheinende m-Funktion wählen. Diese Wahl kann natürlich auch gänzlich außerhalb der referierten Carnapschen Vorschläge erfolgen. Wählt

man die Funktion $m_\lambda(\cdot)$, so wird man durch kleinere Werte für λ (bzw. durch die Wahl solcher μ-Werte, die kleinere λ-Werte erzeugen) den empirischen Faktor und durch größere Werte für λ den logischen Faktor der Untersuchung hervorheben, sofern die Maßfunktion der Berechnung der entsprechenden Bestätigungsgrade im Sinne der induktiven Logik zugrundegelegt wird. Natürlich brauchen die induktionslogischen Gesichtspunkte nicht mit denen einer formalen Didaktik, wie sie in 1 charakterisiert wurde, übereinzustimmen.

Es soll noch

$$c^*(j, i) = \frac{m^*(i \wedge j)}{m^*(i)}$$

für dieselben Satzpaare $\mathcal{L}_2^3$ berechnet werden, für die in 2.9 die c_1-Werte bestimmt wurden.

Natürlich ist aus denselben Gründen wie bei $c_1(\cdot, \cdot)$

$$c^*(i_9, i_{10}) = c_1(i_9, i_{10}) = 1$$

und

$$c^*(j, i) = c_1(j, i) = 0$$

für alle Satzpaare j, i, deren logische Spielräume einen leeren Durchschnitt besitzen.

Für die Bestätigungsgrade von i_{10} bezüglich i_9, i_7 und i_5 ergibt sich der Reihe nach:

$$c^*(i_{10}, i_9) = \frac{m^*(i_9 \wedge i_{10})}{m^*(i_9)} = \frac{m^*(i_{10})}{m^*(i_9)} = \frac{\frac{1}{72}}{\frac{2}{72}} = \frac{1}{2} \, ,$$

sowie in entsprechender Weise

$$c^*(i_{10}, i_7) = \frac{1}{9} \, , \quad c^*(i_{10}, i_5) = \frac{1}{36} \, .$$

Der mit der intuitiven Erwartung übereinstimmenden Ordnungsrelation

$$c_1(i_{10}, i_5) = \frac{1}{64} < c_1(i_{10}, i_7) = \frac{1}{16} < c_1(i_{10}, i_9) = \frac{1}{2}$$

entspricht vollständig die Relation

$$c^{*}(i_{10}, i_{5}) = \frac{1}{36} < c^{*}(i_{10}, i_{7}) = \frac{1}{9} < c^{*}(i_{10}, i_{9}) = \frac{1}{2} .$$

2.12 Erster Exkurs: "Bestätigungsmaschinen"

Überträgt man die Operationen zur Berechnung des Maßes m - in welcher der referierten Versionen immer - sowie des entsprechenden Maßes c einer Datenverarbeitungsanlage, so kann λ einfach als konstant (z.B. $\lambda = 1$) festgesetzt werden oder variabel sein. Im Falle der Veränderlichkeit könnte λ der Vorschrift einer (empirisch begründeten) festen Zeitfunktion folgen oder durch eine Funktion "gesteuert" werden, deren Vorschrift und Argumentbereich auch noch von gewissen operativen Gegebenheiten, z.B. von informationsverarbeitenden Prozessen innerhalb eines Lernsystems, abhängt. λ könnte aber auch als stochastischer "Leitparameter" aufgefaßt werden. In diesem Falle wäre, wenn man beispielsweise ein sich zwischen 1 und 10 aleatorisch änderndes ganzzahliges λ wünscht, ein Zufallsgenerator einzubeziehen.

Im Sinne der Bestätigungstheorie Carnaps ergäben sich so, je nach entsprechender Programmierung des Automaten, verschiedene Typen von "Bestätigungsmaschinen", genauer: von "Maschinen zur automatischen Hypothesenbestätigung". Diese ließen sich in allen Fällen hinreichend einfacher Sprachsysteme koppeln mit heuristisch programmierten "induktiven Maschinen"[12)] (bzw. mit heuristischen und induktiven Programmen[13)]). Derartige "Induktions- und Bestätigungsmaschinen" können im Rahmen strenger Definierbarkeit beliebige logische - induktive und, als Grenzfall derselben, deduktive - Operationen ausführen. Sie können zudem gleichzeitig als adaptive Systeme mit einer Einrichtung zur Speicherung von hinreichend c-bestätigten Informationen, nämlich von hinreichend c-bestätigten Sätzen in $\mathcal{L}$ [14)], versehen werden. Dieser Wissensspeicher wäre so anzulegen, daß er bestimmten internen Strukturierungsanforderungen genügt, die den Ordnungsgesichtspunkten systematischer, im weitesten Sinne zu verstehender Wissensdokumentation (zwischen den beiden Polen des noch rein aggregativen und des hochtheoretisierten Wissens) entsprechen. Der Wissensspeicher ist nicht als starr (und lediglich akkumulierend), sondern als veränderlich und "lernend" zu denken. Seine Änderungen sollten erfolgen nach Maßgabe

1. neuer Informationen, die er von außen empfängt,
2. veränderter Bestätigungsgrade infolge neuer empirischer Daten und
3. durch "innere" Operationen, die die fortschreitende Theoretisierung der gespeicherten Informationsbestände zum Ziel haben.

Der ideale und bereits logisch fiktive Grenzfall ist die alle bekannten empirischen Daten einschließende axiomatisch-deduktive Theorie. Die Art und Weise des Ineinandergreifens (und Trennens) von im engeren Sinne operativen und speichernden Funktionen, worüber beim Menschen nur sehr wenig bekannt ist [14], mag dabei durch technische Möglichkeiten und Bequemlichkeiten bestimmt werden.

Als Operator-System eines geeignet motivierten [15] künstlichen Kybiak-Organismus würde die hier skizzierte "Induktions- und Bestätigungsmaschine" die Denkfunktionen eines Erfahrungswissenschaftlers strukturell adäquat simulieren [16]. Die hierfür zu erfüllenden spezialisierenden Bedingungen, die sich u.a. auf Perzeptor- und Effektorfunktionen beziehen [17], dürften im Rahmen nicht zu hoher Adäquationsforderungen [16] prinzipiell sämtlich exakt beschreibbar sein.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß diese Überlegungen, die der wissenschaftlichen Heuristik gewisse Möglichkeiten eröffnen können, auch für die kybernetische Pädagogik von Interesse sind, zumal dort, wo es um die Konstruktion von Lehrmaschinen mit automatischer Kontrolle des Lehrerfolges und dauernder Anpassung an denselben geht.

Allerdings wird hinsichtlich der Frage der maschinellen Induktion unter der Kontrolle vorgegebener c-Werte ersichtlich vorausgesetzt, daß diese Generalisationen insgesamt auf einer Linie produktiven Lernens liegen, also einem etwa pragmatisch zu verstehenden Kriterium der "Realitätsanreicherung" genügen. Ob diese Voraussetzung zutrifft, dürfte angesichts mancher Künstlichkeiten und Unstimmigkeiten der Theorie Carnaps keineswegs zweifelsfrei sein [18]. Indem ohne Diskussion dieser Fragen die Problematik der Carnapschen Definition der "Hypothesenbestätigung" in Ansehung ihrer Adäquatheit mit dem zugehörigen Explikandum ausdrücklich hervorgehoben wird, soll jedoch gleichzeitig daran erinnert werden, daß Carnaps Theorie immerhin die einzige logisch-semantische und quantitative Theorie der Induktion ist, die gegenwärtig zur Verfügung steht. Vielleicht ist es zweckmäßig, die gedankenreiche Konstruktion Carnaps weniger an ihren Bedenklichkeiten als an den Möglichkeiten ihrer Präzisierung und ihres Ausbaus für weiterreichende wissenschaftliche Anwendungen zu messen.

2.13 Grundbegriffe der Theorie der semantischen Information (ohne Schätzungs- und Spezifikationsmaß)

Die in 2.5 abgebrochene Definitionenkette soll noch ein weniges weitergeführt werden. Die folgenden Begriffsbestimmungen sind solche der Theorie der semantischen Information von Bar-Hillel und Carnap [19].

(31) Ein Inhaltselement von $\mathfrak{L}_n^\pi$ ist eine aus $n \cdot \pi$ Gliedern bestehende Disjunktion, deren jedes Glied entweder ein Atomsatz oder seine Negation ist, z.B. für das Beispiel $\mathfrak{L}_2^3$: $\sim P_1a_1 \vee P_2a_1 \vee \sim P_3a_1 \vee P_1a_2 \vee P_2a_2 \vee \sim P_3a_2$.

(32) Der Inhalt eines Satzes i, in Zeichen: Inh(i), ist die Klasse aller Inhaltselemente, die von i bezüglich $\mathfrak{L}_n^\pi$ L-impliziert werden.

(33) Das Inhaltsmaß von i, in Zeichen: inh(i), ist gleich m($\sim$i).

Diese Definition rechtfertigt sich daraus, daß Inh(i) gleich der Klasse der Negationen der Zustandsbeschreibungen des logischen Spielraumes von i gesetzt wurde.

Man findet leicht:

[6] Wenn i L-impliziert j, so Inh(j) $\subset$ Inh(i).

Abb. 2 veranschaulicht diesen L-Implikationsfall.

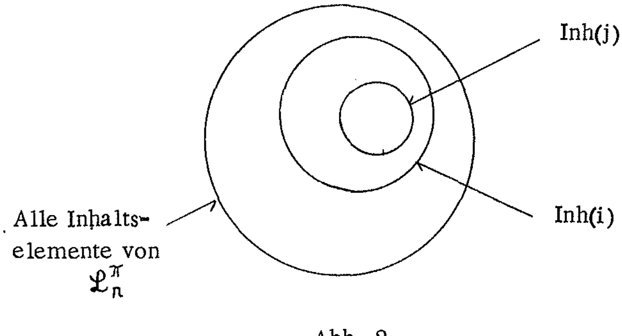


Abb. 2

[7] $0 \leq$ inh(i) ≤ 1, wobei 0 der L-Wahrheit und 1 der L-Falschheit von i entspricht.

[8] m($\sim$i) = 1 - m(i).

Denn für i = $\sim$j gilt: $\mathfrak{R}_i = \oplus - \mathfrak{R}_j$.[20)]

Um die Begriffe Inh(·) und inh(·), die sich in (32) bzw. (33) auf einzelne Sätze beziehen, auf den Fall des Inhaltes bzw. Inhaltsmaßes eines Satzes j bezüglich eines Satzes i zu verallgemeinern, werde weiter bestimmt:

(34) Inh(j/i) = Inh(i $\wedge$ j) - Inh(i).[20)]

(35) $inh(j/i) = inh(i \wedge j) - inh(i)$.

inh(i) ist eines der möglichen Explikate des umgangssprachlichen Begriffs der (Mengeder)durch einen Satz i eines semantischen Sprachsystems vermittelten Information. Setzt man verschärfend voraus, daß alle Basissätze von $\mathcal{L}_n^\pi$ dieselbe Informationsmenge enthalten sollen (unahhängig davon, ob diese Sätze allein oder als Komponenten irgendeiner nicht-kontradiktorischen Konjunktion auftreten), und will man weiterhin die durch einen Basissatz vermittelte Informationsmenge auf 1 normieren, so liefert die folgende Definition ein adäquates Explikat des Begriffs der Menge an semantischer Information, die durch einen Satz vermittelt wird:

(36) $$inf(i) \triangleq ld \cdot \frac{1}{1-inh(i)},$$

wo $ld(\cdot) = {}^2log(\cdot)$ ist. Ferner gelte analog zu (35):

(37) $$inf(j/i) = - ld\ c(j,i) = - ld \frac{m(i \wedge j)}{m(i)}$$

Aus (33), (36) und [8] folgert man leicht:

[9] $$inf(i) = - ld\ m(i);$$

ferner ergibt sich

[10] $$0 \leqq inf(i) \leqq \infty .$$

2.14 Ein Maß der Lernqualität

Unter den in 2.2 genannten Voraussetzungen kann nun versucht werden, eine Maßfunktion zu finden, die die Abweichung einer Antwort des Lernsystems von der optimal erwartbaren, vollständig "richtigen" Antwort nach Abschluß einer Lernphase im Sinne von 1.3 zu berechnen gestattet. Dauer und Struktur der betrachteten Lernphase bleiben dabei im Rahmen dieser Untersuchung unberücksichtigt.

Die im didaktischen Kommunikationsbereich des Lehr-Lern-Systems auftretenden informationellen Entitäten (vgl. 2.1 und 2.2) sind sämtlich Sätze (vgl. die Bestimmungen von 2.3) von $\mathcal{L}_n$. Für das Folgende werde mit i_{opt} der als bestmögliche Antwort des Lernsystems erwartbare Satz bezeichnet. Für i_{opt} seien nur entweder L-wahre oder faktische Sätze zugelassen (vgl. die entsprechenden Bestimmungen in 2.4).

Klammert man unter den jetzt inhaltlich-"semantisch belegt" zu denkenden faktischen Sätzen alle Sätze "wertnormativen" Inhalts aus, so repräsentiert ein inhaltlich-"semantisch belegtes" faktisches i_{opt}, vom Lernsystem her betrachtet, gleichsam eine Klasse von Eigenschaften der "empirischen Realität" oder, kurz gesagt, ein "Ereignis". i_{opt} ist insofern für das Lernsystem "empirisch wahr" (in I. Kants Terminologie "synthetisch"). Für einen außerhalb der Lehrsystem-Lernsystem-Relation stehenden externen Beobachter ist jedoch dieses i_{opt} nur "möglicherweise empirisch wahr"; der Realitätsbegriff des externen Beobachters transzendiert die dem Lernsystem gegebene, dem Lehr-Lern-System immanente Realität. Das faktische i_{opt} kann sich z. B. als lediglich "autoritär wahr" (d. h. als wahr nur kraft der Berufung auf eine Autorität, etwa diejenige eines Lehrers) und als empirisch falsch erweisen - "empirisch" in jenem transzendierenden Sinne verstanden. Diese Problematik fällt indes nach der Heimannschen Untergliederung (vgl. 1. 1) wesentlich in den Bereich der Sach-Logik (Lehrstoffwahl), gehört also nicht zum Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

Für die Zwecke dieser Untersuchung soll i_{opt} strukturell auf konjunktive Verknüpfungen von Basissätzen beschränkt werden. Hieraus folgt, daß i_{opt} nicht L-wahr sein kann. Denn der logische Spielraum einer Konjunktion von Basissätzen ist gleich dem Durchschnitt der logischen Spielräume der einzelnen Basissätze, und dieser Durchschnitt müßte im Falle der L-Wahrheit der Konjunktion die Gesamtklasse der Zustandsbeschreibungen von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ ergeben. Letzteres ist nur möglich, wenn jede der an der Durchschnittsbildung beteiligten Teilklassen mit der Gesamtklasse zusammenfällt. Tatsächlich aber enthält der logische Spielraum eines jeden Basissatzes genau $2^{n \cdot \pi - 1}$ Zustandsbeschreibungen.

Für i_{opt} sei weiterhin der Fall der L-Falschheit ausgeschlossen. Insgesamt kann mithin i_{opt} nur faktisch im Sinne der Bestimmung (26) von 2. 4 sein, und in der Tat ist hiermit genau der Bereich derjenigen Sätze von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ abgegrenzt, in denen für gewöhnlich interessante Lehrstoffe formuliert werden.

Dagegen mögen für die vom Lernsystem nach Befragen erteilten Antworten beliebige konjunktive und auch disjunktive Verknüpfungen von Basissätzen zugelassen werden. j bezeichnet eine einzelne solche Antwort.

Das zu lösende Problem besteht in der Explikation der Begriffe "Qualität einer Antwort j bezüglich der zugehörigen optimalen Antwort i_{opt}" bzw. "Abweichung der Antwort j von der zugehörigen optimalen Antwort i_{opt}", wobei der Ausdruck "Antwort" bei künstlichen Lernsystemen das entsprechende "semantische Output" des Systems auf ein gewisses "semantisches Frage-Input" bezeichne. Die Explikate der beiden genannten Begriffe mögen beziehungsweise mit qual(j, i_{opt}),

abw(j, i_{opt}) symbolisiert werden, und es werde so vorgegangen, daß

qual(j, i_{opt}) auf abw(j, i_{opt}),
abw(j, i_{opt}) auf inf(i_{opt}) und inf(j),
inf(i_{opt}), inf(j) auf inh(i_{opt}) bzw. inh(j) und
inh(i_{opt}), inh(j) auf m(i_{opt}) bzw. m(j)

reduziert wird. Es sei nämlich

$$(38) \quad \text{qual}(j, i_{opt}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases} \\ 1 - \dfrac{\text{abw}(j, i_{opt})}{\underset{(j')}{\text{Max}}\left[\text{abw}(j', i_{opt})\right]}, & \text{wenn } \begin{cases}(4)\\(5)\end{cases} \\ 1, & \text{wenn } (6), \end{cases}$$

wobei j' alle Sätze von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ (bei dem jeweiligen festen i_{opt}) durchlaufen soll und für (1) bis (6) gilt:

(1) j ist L-determiniert,

(2) j ist L-unverträglich mit i_{opt},

(3) weder i_{opt} L-impliziert j noch j L-impliziert i_{opt},

(4) i_{opt} L-impliziert j,

(5) j L-impliziert i_{opt},

(6) j = i_{opt}.

Man überzeugt sich zunächst leicht, daß (1) bis (6) alle Argumentmöglichkeiten von qual(j, i_{opt})(bei nicht L-determiniertem i_{opt}) ausschöpfen. Für die "mittleren" Fälle (4) und (5) - sie mögen unter dem Begriff des "Hauptfalles" von (38) zusammengefaßt werden - gelte einfach

$$(39) \qquad \text{abw}(j, i_{opt}) = |\,\text{inf}(i_{opt}) - \text{inf}(j)\,|,$$

so daß mittels [9] folgt:

$$[11] \quad abw(j, i_{opt}) = \left| ld \frac{1}{1-inh(i_{opt})} - ld \frac{1}{1-inh(j)} \right| = \left| ld \frac{1-inh(j)}{1-inh(i_{opt})} \right|$$

sowie mittels (33) und [8]:

$$[12] \quad abw(j, i_{opt}) = \left| ld \frac{m(j)}{m(i_{opt})} \right| .$$

Insgesamt erhält man für den Hauptfall von (38):

$$[13] \quad qual(j, i_{opt}) = 1 - \frac{1}{\underset{(j')}{Max} [abw(j', i_{opt})]} \cdot \left| ld \frac{m(j)}{m(i_{opt})} \right| ,$$

wo $m(\cdot)$ die oben (2. 7 bis 2. 11) diskutierte und exemplifizierte Maßfunktion für Sätze von $\mathcal{L}_n^{\pi}$ ist.

In (38) wurde zur Maximumbildung der Abweichungsfunktion nur über j in $\mathcal{L}_n^{\pi}$ variiert. Man erreicht allerdings hierdurch kein bezüglich $\mathcal{L}_n^{\pi}$ absolutes Maximum, vielmehr bleibt das abw(• , •)-Maximum abhängig von i_{opt}. Um dieses absolute Maximum bezüglich $\mathcal{L}_n^{\pi}$, in Zeichen: $\overline{Max} [abw(j', i'_{opt})]$, zu erhalten, müßte auch noch über i_{opt} in ganz $\mathcal{L}_n^{\pi}$ variiert werden. Es wird sich jedoch zeigen, daß bei geeigneter Wahl der m-Funktion das relative Maximum gemäß (38) eine tatsächlich der intuitiven Erwartung adäquate qual-Funktion liefert (vgl. 2. 15).

Sicher gilt wegen

$$[14] \quad 0 \leqq \left| ld \frac{m(j)}{m(i_{opt})} \right| \leqq \underset{(j')}{Max} [abw(j', i_{opt})] \leqq \infty$$

die Ungleichheitsbeziehung

$$[15] \quad 0 \leqq qual (j, i_{opt}) \leqq 1.$$

Man hat also in Gestalt von (38) eine für [0, 1] definierte Maßfunktion, die unter den oben getroffenen Voraussetzungen das vorgegebene Explikandum in seiner wesentlichen Bedeutung treffen dürfte.[21] Abb. 3 verdeutlicht die gegebenenfalls

maschinell zu treffenden Fallunterscheidungen in einer stufenweise exhaustiven Aufgabelung (dabei sind die sich nach (38) ergebenden Gabelungsstufen um eine sechste solche Stufe erweitert worden, die in 2.16 erklärt wird).

Die quantiative Bestimmung der Lernqualität gemäß (38) basiert allerdings, worauf nochmals ausdrücklich hinzuweisen ist, auf einer Abweichung des Satzes j vom Satz i_{opt}, die ausschließlich auf der deduktiv-induktiven Linie der Besonderung bzw. Verallgemeinerung von i_{opt} liegt, insofern jedoch der ursprünglichen Problemstellung voll entspricht (vgl. 1.3). Man kann diesen vergleichsweise einfachen Lerntypus (dessen Schwierigkeiten indes mit wachsender Komplexität des Sprachsystems erheblich zunehmen dürften) vielleicht als "repetitives (Fakten-)Lernen" und für den Fall der Zuordnung einstelliger Prädikate zu Individuenkonstanten speziell als "repetitives Zuordnungslernen" bezeichnen, wobei das Attribut "repetitiv" darauf hinweisen soll, daß der Lernerfolg genau dann optimal ist, wenn die Antwort j des Lernsystems weder in der deduktiven noch in der induktiven Richtung von der "genau wiedergegebenen" und in diesem Sinne "optimalen" Antwort i_{opt} abweicht.[22)]

Die dem rein repetitiven Lernen angemessene qual(• , •)-Funktion muß alle Formen selbständiger Informationsverarbeitung durch das Lernsystem, die nicht der Informationsspeicherung dienen, unterbewerten, auch solche, die in der "Unter-" oder "Überextensionalisierung" von Prädikat-Individuum-Zuordnungen bestehen. Es scheint, daß derzeit diese starke lerntheoretische Beschränkung der Preis ist, den man vor allem angesichts des sehr primitiven Sprachsystems $\mathcal{L}_n^{\pi}$ für eine adäquate Quantifizierung des Begriffs der Lernqualität zahlen muß. Weitere kritische Bemerkungen zur Definition (38) folgen in 2.16.

2.15 Die qual´(• , •)-Funktion

Da qual(• , •) auf m(•) zurückgeht, ist noch die Frage der Wahl der m-Funktion für tatsächliche numerische Berechnungen zu erörtern. Der einfachste Fall, die in 2.7 betrachtete "Gleichverteilungsfunktion" m´(•), führt zu folgender Bestimmung des Abweichungsmaximums nach (38):

$$\underset{(j')}{\mathrm{Max}}\left[abw'(j', i_{opt})\right] = \begin{cases} p, & \text{wenn } i_{opt} \text{ L-impliziert } j, \\ n \cdot \pi + 1 - p, & \text{wenn } j \text{ L-impliziert } i_{opt}, \end{cases}$$

wo $p \leq n \cdot \pi$ die Anzahl der in i_{opt} konjunktiv verknüpften Basissätze (bei beliebigem j) bezeichnet.

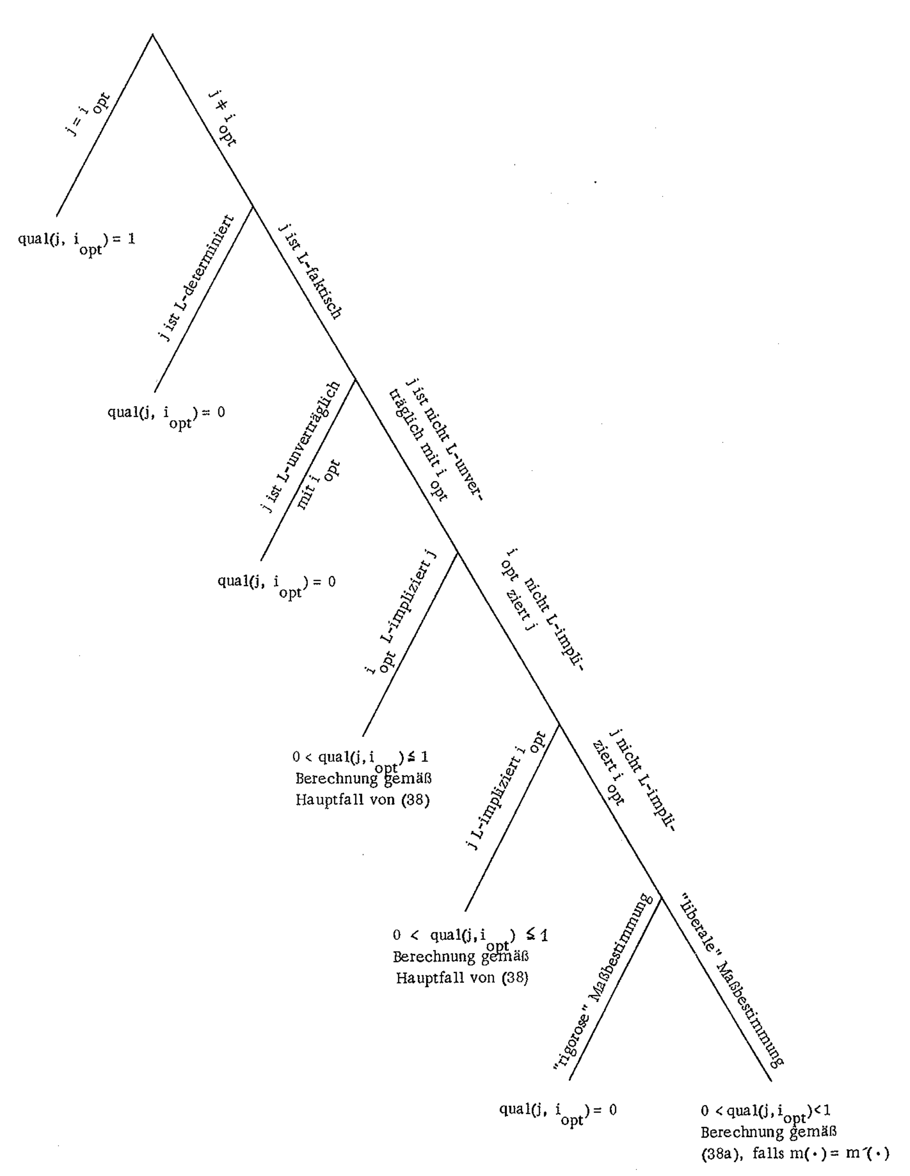


Abb. 3

(i_{opt} und j besitzen nur konjunktive Glieder;

Formel (38 a) ist nur für m(•) = m´(•) angegeben)

Das a b s o l u t e Maximum der Abweichung, in Zeichen

$\overline{\text{Max}} \left[abw'(j', i'_{opt}) \right]$, ergibt sich dann für $p = 1$ bzw. $p = n \cdot \pi$ als

$$\overline{\text{Max}} \left[abw'(j', i'_{opt}) \right] = n \cdot \pi \ (= \text{ld } 2^{n \cdot \pi} = \text{ld } \mu^{n} = \text{ld } \zeta \ ).$$

Die Wahl des absoluten Maximums für die Maßfunktion (38) dürfte sich bei Wahl der "Gleichverteilungsfunktion" jedoch kaum empfehlen. Denn Formel [13] sollte in adäquater Weise dem Umstand Rechnung tragen, daß man im Hauptfall von (38) für zwei Satzpaare $j^{(1)}, i^{(1)}_{opt}$ und $j^{(2)}, i^{(2)}_{opt}$ mit

$$\frac{m'(j^{(1)})}{m'(i^{(1)}_{opt})} = \frac{m'(j^{(2)})}{m'(i^{(2)}_{opt})}$$

zu demselben Qualitätsmaß gelangt. Dies aber ist der Fall, wenn man das oben definierte r e l a t i v e Maximum wählt. Dieses fällt in den beiden Grenzfällen, daß i_{opt} speziell ein Basissatz bzw. eine Zustandsbeschreibung ist, mit dem absoluten Maximum zusammen.

Die Frage der m-Funktion wird in 2.17 erneut aufgegriffen.

2.16 Dritte Fortsetzung des Beispiels von 2.6 und Diskussion der Formel (38)

Für das Beispiel $\mathcal{L}^3_2$ folgt bei der Wahl der "Gleichverteilungsfunktion":

$$\text{Max} \left[abw'(j', i'_{opt}) \right] = \begin{cases} p, & \text{wenn } i_{opt} \text{ L-impliziert } j \\ 7 - p, & \text{wenn } j \text{ L-impliziert } i_{opt}, \end{cases}$$

wo wieder p mit $1 \leq p \leq 6$ die Anzahl der Konjunktionsglieder von i_{opt} bezeichnet. Mithin ist gemäß [13]:

$$qual'(j, i_{opt}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \\ 1 - \frac{1}{p} \cdot \left| \text{ld } \frac{m'(j)}{m'(i_{opt})} \right|, & \text{wenn } (4) \\ 1 - \frac{1}{7-p} \cdot \left| \text{ld } \frac{m'(j)}{m'(i_{opt})} \right|, & \text{wenn } (5) \\ 1, & \text{wenn } (6), \end{cases}$$

wobei für (1) bis (6) die gleichen Bestimmungen gelten wie im allgemeinen Fall (38).

Es mögen wieder die Sätze von Tab. 2 in 2.6 als Beispiele herangezogen werden. Da i_{opt} nie L-determiniert ist, scheiden i_{11} und i_{12} aus; sonst jedoch können grundsätzlich alle Sätze dieser Beispielserie die Rolle von i_{opt} übernehmen. Es seien zwei Fälle unterschieden und anhand der ausgewählten Beispiele diskutiert.

(a) Deduktiver Fall

Wählt man als optimale Antwort z.B.

$$i_{opt} = i_{10} = P_1a_1 \wedge P_2a_1 \wedge \sim P_3a_1 \wedge P_1a_2 \wedge \sim P_2a_2 \wedge P_3a_2,$$

so mag etwa die folgende inhaltlich-"semantische Belegung" der Individuen- bzw. Prädikatzeichen den Zusammenhang veranschaulichen; es stehe nämlich

a_1 für: die Sonne,
a_2 für: die Erde,

P_1 für: ist kugelförmig,
P_2 für: ist dauernd heiß,
P_3 für: ist bewohnt.

Es ergibt sich:

$qual'(i_1, i_{10}) = qual'(i_2, i_{10}) = qual'(i_3, i_{10}) = qual'(i_4, i_{10}) = 0$, da $j \wedge i_{10}$ für $j = i_1, i_2, i_3, i_4$ L-falsch ist; ferner ist

$qual'(i_5, i_{10}) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \left| ld \frac{m'(i_5)}{m'(i_{10})} \right| = \frac{1}{6}$, wobei die m'-Werte der Tab. 4 von 2.9 entnommen sind.

Entsprechend folgen:

$qual'(i_6, i_{10}) = \frac{1}{3}$, $qual'(i_7, i_{10}) = \frac{1}{2}$, $qual'(i_8, i_{10}) = \frac{2}{3}$,

$qual'(i_9, i_{10}) = \frac{5}{6}$, $qual'(i_{10}, i_{10}) = 1$ sowie

$qual'(i_{11}, i_{10}) = 0$, da i_{11} L-falsch ist, und

$qual'(i_{12}, i_{10}) = 0$, da i_{12} L-wahr und $i_{12} \neq i_{10}$ ist.

Die sich hieraus ergebende Ordnungsbeziehung

$$0 = qual'(i_1, i_{10}) = qual'(i_2, i_{10}) = qual'(i_3, i_{10}) = qual'(i_4, i_{10})$$

$$= qual'(i_{11}, i_{10}) = qual'(i_{12}, i_{10}) < qual'(i_5, i_{10}) < qual'(i_6, i_{10})$$

$$< qual'(i_7, i_{10}) < qual'(i_8, i_{10}) < qual'(i_9, i_{10}) < qual'(i_{10}, i_{10}) = 1$$

dürfte im wesentlichen den intuitiven Vorstellungen entsprechen, die der unmittelbare Vergleich der (etwa nach der obigen inhaltlich-"semantischen Belegung" interpretierten) Sätze j und i_{opt} miteinander unter Berücksichtigung der in Frage stehenden Lernart erzeugt.

Es mag vielleicht der im Unterfall (2) von (38) liegende "logische Rigorismus" befremden; denn es ist etwa $qual'(i_3, i_{10}) = 0$, obgleich das Lernsystem hier immerhin von den 6 Prädikat-Individuum-Zuordnungen des Satzes $i_{opt} = i_{10}$ in der Antwort $j = i_3$ zwei dieser Zuordnungen richtig wiedergibt. Dies wird ihm nur deshalb nicht als Lernerfolg angerechnet, weil *eine* Prädikat-Individuum-Zuordnung falsch und damit die Antwort zu i_{opt} kontradiktorisch ist. Pädagogen, die diesen "Rigorismus" ablehnen, mögen das Explikat $qual(j, i_{opt})$ in dem genannten Punkte entsprechend ihren jeweiligen Auffassungen und Erfahrungen abwandeln, was wahrscheinlich keinen unüberwindbaren Schwierigkeiten begegnet. Vielleicht ist es im Sinne eines möglichst hohen praktischen Lernerfolges für die vorliegende Lernart gut, mit gewisser Strenge das Lernsystem dazu zu erziehen, keine zur vollständig richtigen Antwort kontradiktorische Antwort zu geben, also eher Zurückhaltung zu üben, als im Zweifelsfall "daraufloszuantworten". Es entspricht dies in gewisser Weise der Haltung des Wissenschaftlers, der nach Abschluß einer heuristischen Phase, die zu einem System von unterschiedlich bestätigten Aussagen über den bearbeiteten Sachbereich geführt hat, aus diesem System nur diejenigen Aussagen als zutreffend behaupten wird, die einen hohen Bestätigungsgrad aufweisen (dieser sei intuitiv oder nach Maßbestimmungen der induktiven Logik ermittelt). Andererseits zeigt das Beispiel des schulüblichen Vokabeln-Lernens, eines wohl typischen "repetitiven Zuordnungslernens", daß

jener logische Rigorismus umso störender ins Gewicht fällt, aus je mehr Konjunktionsgliedern die optimale Antwort i_{opt} besteht. Man wird diese Schwierigkeit in der hier nicht behandelten, nichtsdestoweniger sorgfältig zu entwickelnden "Theorie des Fragens" zu berücksichtigen haben - oder aber, wie betont, das Explikat gemäß (38) ändern müssen, um mögliche Fehlbeurteilungen des Lernsystems zu vermeiden.

Zu einem weiteren "Rigorismus" führt, wie man sich ferner überzeugt, der Unterfall (3) von (38). Liegt nämlich L-Unverträglichkeit von j mit i_{opt} vor, so wird man die Lernqualität von j bezüglich i_{opt} wohl schwerlich auch dann mit 0 bewerten wollen, wenn j sich konjunktiv zusammensetzt erstens aus einer großen Zahl von Konjunktionsgliedern, die von i_{opt} L-impliziert werden (und folglich mit i_{opt} nicht L-unverträglich sind) und zweitens aus einer kleinen Zahl nicht mit i_{opt} L-unverträglicher Konjunktionsglieder, die nicht von i_{opt} L-impliziert werden (so daß also nicht der ganze Satz j von i_{opt} L-impliziert wird). Dieser Fall wäre z. B. gegeben, wenn ein Schüler von den 20 Vokabeln eines fremdsprachlichen Übungsstückes, die er zu lernen hatte und nach denen er gefragt wird, 19 Vokabeln richtig hersagt und anstelle der einen fehlenden Vokabel eine Vokabel aus einem anderen Übungsstück angibt. Obgleich die letztere nicht mit jenen 20 Vokabeln, die i_{opt} repräsentieren, "unverträglich" ist, führt die eine falsche Vokabel zur schlechtestmöglichen Bewertung der Lernleistung. Auch auf diese Unzulänglichkeit der Formel (38) sei ausdrücklich hingewiesen.

Sie wäre für "konjunktive Antworten" j des Unterfalls (3) von (38) durch die folgende Festsetzung zu beseitigen. Man zerlegt j in genau zwei Konjunktionen j_1 und j_2, bildet also $j = j_1 \wedge j_2$, derart daß j_1 die längstmögliche Konjunktion ist, die sich aus den Basissätzen von j bilden läßt und für die gilt: i_{opt} L-impliziert j_1; j_2 ist die "Restkonjunktion" der nicht von i_{opt} L-implizierten Basissätze. Es gilt natürlich: j L-impliziert j_1. Das Lernqualitätsmaß kann dann nach der Formel

$$\text{(38 a)} \qquad \text{qual}'_{\wedge}(j, i_{opt}) = \text{qual}'(j_1, i_{opt}) \cdot \text{qual}'(j, j_1)$$

berechnet werden, was zu erwartungsgemäßen Zahlenwerten führen dürfte.

Noch ein weiteres bedarf der Hervorhebung. Dem Lernsystem werden ja grundsätzlich auch solche Antworten j zugestanden, in denen nicht nur die Negation und die Konjunktion, sondern auch die Disjunktion als verknüpfende Funktoren auftreten. Man betrachte, wiederum mit Bezug auf die Beispiel-Sätze von Tab. 2, z. B. die Satz-Disjunktion

$j = i_5 \vee i_6 = P_1 a_1 \vee (\sim P_3 a_1 \wedge P_3 a_2)$,

die man sich in der oben gegebenen einfachen inhaltlich-"semantischen Belegung" etwa als die Adressaten-Antwort "Die Sonne ist kugelförmig oder die Sonne ist nicht bewohnt, aber die Erde ist bewohnt"[23] interpretieren kann. Diese oder-Verknüpfung ist natürlich als Antwort eines Lernsystems auf eine bestimmte Frage wesentlich schwächer als die entsprechende und-Verknüpfung $i_5 \wedge i_6$. Tatsächlich bleibt diese intuitiv geschätzte Relation zwischen den didaktischen Bewertungen der Antworten $i_5 \vee i_6$ und $i_5 \wedge i_6$ bei der qual´-Bewertung bezüglich $i_{opt} = i_{10}$ erhalten. Denn es ist

$$\mathcal{R}_{i_5 \vee i_6} = \mathcal{R}_{i_5} \cup \mathcal{R}_{i_6} = (1,3,4,5,6,7,9,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,27,28,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,49,53,54,55,56,57,58,63)$$

mit 40 Elementen (vgl. Tab. 1)

und daher

$$m'(i_5 \vee i_6) = \frac{40}{64} = \frac{5}{8},$$

so daß sich ergibt:

$$qual'(i_5 \vee i_6, i_{10}) = 1 - \frac{1}{6} \cdot ld \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{64}} \approx 0,1130.$$

Andererseits ist

$$\mathcal{R}_{i_5 \wedge i_6} = \mathcal{R}_{i_5} \cap \mathcal{R}_{i_6} = (4,13,17,18,33,34,39,53)$$

mit 8 Elementen

und somit

$$m'(i_5 \wedge i_6) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8},$$

so daß folgt:

$$qual'(i_5 \wedge i_6, i_{10}) = 1 - \frac{1}{6} \cdot ld \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

Mithin gilt die Ordnungsrelation

$$\text{qual}'(i_5 \vee i_6, i_{10}) < \text{qual}'(i_5, i_{10}) < \text{qual}'(i_6, i_{10}) < \text{qual}'(i_5 \wedge i_6, i_{10}),$$
$$(\approx 0{,}1130) \qquad (\approx 0{,}1667) \qquad (\approx 0{,}3333) \qquad (0{,}5)$$

womit die Behauptung bestätigt ist. Man sieht aber auch, daß diese Ordnungsrelation eine dritte Schwierigkeit der Maßbestimmung nach (38) aufdeckt: eine aus sämtlich mit i_{opt} nicht L-unverträglichen Basissätzen bestehende "disjunktive Antwort" (hier: $i_5 \vee i_6$) kann schwächer bewertet werden als eine Antwort, die aus nur einer der Disjunktionskomponenten (hier: i_6) besteht. Es ist so, als würde das in der oder-Verknüpfung zum Ausdruck kommende "Schwanken" des antwortenden Lernsystems besonders "bestraft".

Um diese Unstimmigkeit (und mit ihr zusammenhängende weitere Schwierigkeiten) zu beseitigen, ließe sich für "disjunktive Antworten" j eine Qualitätsfunktion bilden, deren Werte sich aus dem arithmetischen Mittel der Qualitätsfunktionswerte der einzelnen Disjunktions-Komponenten von j bezüglich i_{opt} ergeben, nämlich

$$\text{(38 b)} \qquad \text{qual}'_{\vee}(j, i_{opt}) = \frac{1}{d} \cdot \sum_{\delta=1}^{d} \text{qual}'(j_\delta, i_{opt}),$$

wo d die Anzahl der Disjunktionskomponenten (die stets Basissätze sind) bezeichnet.

Nach dieser Formel erhält man anstelle der letzten Ordnungsbeziehung:

$$\text{qual}'(i_5, i_{10}) < \text{qual}'(i_5 \vee i_6, i_{10}) < \text{qual}'(i_6, i_{10}) < \text{qual}'(i_5 \wedge i_6, i_{10}),$$

denn es ist, wie man leicht nachrechnet, $\text{qual}'(i_5 \vee i_6, i_{10}) = \frac{1}{4}$.

Viertens schließlich ist auch der Umstand zu beachten, daß sich an der durch $\text{qual}'(\cdot,\cdot)$ nach (38) gemessenen Lernqualität der "disjunktiven Antwort" nichts ändert, wenn eine der Disjunktions-Komponenten mit i_{opt} L-unverträglich ist, während wohl die meisten Pädagogen dazu neigen dürften, eine "disjunktive Antwort", deren sämtliche Disjunktions-Komponenten in bezug auf die optimale Antwort richtig sind, höher zu bewerten als eine ebensolche Antwort, bei der nicht alle Disjunktions-Komponenten, z. B. nur genau eine, zutreffen. Auch bezüglich dieser Konsequenz wird die Definition (38) ausdrücklich zur Diskussion gestellt.

Wählt man übrigens $i_{opt} = i_5 \wedge i_6$ (bei unverändertem $j = i_5 \vee i_6$), so ergibt die Rechnung:

$$qual'(i_5 \vee i_6, i_5 \wedge i_6) = \frac{1}{2} = qual'(i_5 \wedge i_6, i_{10}),$$

ein Resultat, das durchaus der intuitiven Erwartung entsprechen dürfte. Es läßt sich dahin interpretieren, daß die "Verschlechterung" der Antwort $i_5 \vee i_6$ gegenüber der Antwort $i_5 \wedge i_6$ durch die geringeren "Anforderungen", die das Optimum $i_5 \wedge i_6$ gegenüber dem Optimum i_{10} an das Lernsystem stellt, genau kompensiert werden.

(b) Induktiver Fall

Im zweiten Fall soll - wiederum zuzüglich der "logischen Grenzfälle" von (38)- die Qualität solcher Antworten j untersucht werden, die i_{opt} "induktiv verallgemeinern". Es sei z. B.

$$i_{opt} = i_5 = P_1 a_1.$$

Dann ergibt sich

$qual'(i_1, i_5) = 0$, da i_5 L-unverträglich mit i_1 ist;

$qual'(i_2, i_5) = qual'(i_3, i_5) = qual'(i_4, i_5) = qual'(i_6, i_5) =$

$qual'(i_8, i_5) = 0$, da für $j = i_2, i_3, i_4, i_6, i_8$ gilt: weder i_5 L-impliziert j noch j L-impliziert i_5; ferner ist

$qual'(i_5, i_5) = 1$, da $i_5 = i_5$, sowie mit Hilfe von Tab. 4 in 2.9:

$$qual'(i_7, i_5) = 1 - \frac{1}{6} \cdot ld \frac{m'(i_7)}{m'(i_5)} = \frac{2}{3},$$

$qual'(i_9, i_5) = \frac{1}{3}$, $qual'(i_{10}, i_5) = \frac{1}{6}$; schließlich ist

$qual'(i_{11}, i_5) = 0$, da i_{11} L-falsch ist, und

$qual'(i_{12}, i_5) = 0$, da i_{12} L-wahr und $i_{12} \neq i_5$ ist.

Als Ordnungsbeziehung ergibt sich

$$0 = qual'(i_1, i_5) = qual'(i_2, i_5) = qual'(i_3, i_5) = qual'(i_4, i_5)$$
$$= qual'(i_6, i_5) = qual'(i_8, i_5) = qual'(i_{11}, i_5) = qual'(i_{12}, i_5)$$
$$< qual'(i_{10}, i_5) < qual'(i_9, i_5) < qual'(i_7, i_5) < qual'(i_5, i_5) = 1.$$

Die oben benutzte Redewendung, es handele sich bei den Antworten i_7, i_9 und i_{10} des Lernsystems um "induktive Verallgemeinerungen" der im Sinne des "repetitiven (Fakten-)Lernens" bestmöglichen Antwort i_{opt}, wird dem Sachverhalt des induktiven Schließens außerhalb der induktiven Logik Carnaps kaum gerecht. Zwar ist es in der Betrachtungsweise der Bestätigungstheorie legitim, jeden Satz j, welcher i_{opt} L-impliziert, als induktive Verallgemeinerung von i_{opt} zu betrachten und zu bezeichnen; Induktion ist hier einfach als Umkehrung der Deduktion und diese als Verfahren der L-Implikation aufgefaßt. Außerhalb der formalisierten Bestätigungstheorie jedoch wird man zumeist wohl wenig Neigung verspüren, z. B. den Satz $P_1a_1 \wedge P_2a_1$ (etwa: "Die Sonne ist kugelförmig und dauernd heiß") eine "induktive Verallgemeinerung" des Satzes P_1a_1 ("Die Sonne ist kugelförmig") zu nennen.

Ohne daß es im vorliegenden Zusammenhang möglich noch nötig wäre, auf die mannigfachen Aspekte des Problems der Induktion einzugehen, sei doch wenigstens angedeutet, daß die sogenannte "reine Induktion", die sich allein aus der Wiederholung gleichartiger Fälle ergibt, ohne weiteres unter den oben verwendeten allgemeineren Induktionsbegriff subsumierbar ist. Sie liegt etwa vor, wenn die induktive Prämisse (hier: i_{opt}) eine Konjunktion der Gestalt

$$P_\alpha a_{\beta_1} \wedge P_\alpha a_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge P_\alpha a_{\beta_s}$$

und die induktive Konklusion (hier: j) eine Konjunktion der Gestalt

$$P_\alpha a_{\beta_1} \wedge P_\alpha a_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge P_\alpha a_{\beta_s} \wedge P_\alpha a_{\beta_{s+1}} \wedge \ldots \wedge P_\alpha a_{\beta_{s+t}}$$

enthält, wo α eine feste Prädikat-Nummer aus $\{1, \ldots, \pi\}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_s$, $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+t} \in \{1, \ldots, n\}$, sowie $\beta_1 < \ldots < \beta_{s+t}$ ist.

Die hierdurch beschriebene induktive Verallgemeinerung wird "heuristisch" im konkreten Fall allerdings erst dadurch möglich, daß dem Schließenden außer P noch andere gemeinsame Eigenschaften Q, R usw. der $a_{\beta_1}, \ldots, a_{\beta_s}$ bekannt sind. Es sind dies Eigenschaften, von denen er darüber hinaus weiß, daß sie auch den $a_{\beta_{s+1}}, \ldots, a_{\beta_{s+t}}$ zukommen. Er schließt dann, analogisierend, von den in den Eigenschaften Q, R usw. gegebenen Übereinstimmungen der $a_{\beta_{s+1}}, \ldots, a_{\beta_{s+t}}$, mit den $a_{\beta_1}, \ldots, a_{\beta_s}$ auf die entsprechenden Übereinstimmungen auch bezüglich P, wobei die Übereinstimmungserwartung im allgemeinen mit wachsendem s selbst größer wird. Der Leser verdeutlicht sich den dargelegten Zusammenhang leicht an selbstgewählten Beispielen.

Nach dem Gesagten vergegenwärtigt man ferner ohne weiteres das entsprechende Verfahren für den anderen Fall, daß von

$$P_{\alpha_1} a_\beta \wedge P_{\alpha_2} a_\beta \wedge \ldots \wedge P_{\alpha_v} a_\beta$$

auf

$$P_{\alpha_1} a_\beta \wedge P_{\alpha_2} a_\beta \wedge \ldots \wedge P_{\alpha_v} a_\beta \wedge P_{\alpha_{v+1}} a_\beta \wedge \ldots \wedge P_{\alpha_{v+w}} a_\beta$$

geschlossen wird. Die den Induktionsschluß ermöglichende Analogisierung setzt in diesem zweiten Fall ein "Vorwissen" voraus, das in der Kenntnis von gemeinsamen Eigentümlichkeiten der $P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_{v+w}}$ besteht. Auch hier sei auf die Angabe leicht auffindbarer Beispiele verzichtet.

Selbstverständlich läßt sich der erste Fall der "reinen Induktion" definitorisch derart verallgemeinern, daß man P durch ein Molekularprädikat ersetzt. Im zweiten Fall erhält man die entsprechende Verallgemeinerung, wenn a_β durch eine (endliche) Individuenklasse ersetzt wird. Hierauf und auf die bei den mannigfachen möglichen Mischformen sehr unübersehbar werdenden Verhältnisse soll im vorliegenden Zusammenhang nicht mehr eingegangen werden. [24)]

Es sei nochmals betont, daß die auf Verallgemeinerung zielenden, vom Adressaten erschlossenen "Induktionsantworten" bei der hier betrachteten Lernart nicht die ihnen anderweitig zustehende Würdigung erfahren. Das Lernsystem soll nicht "schließen", sondern "behalten". Und es soll das Behaltene wiederholen können. Es soll sich zu seiner "didaktischen Realität", dem Lehrsystem, etwa so verhalten wie ein (allerdings fiktives) Erkenntnissubjekt, das seine Außenwelt in der Gesamtheit ihrer "Elementarereignisse" via Gegenwärtigung abbildet und dieses Abbild als "konjunktive Global-Information" in seinem Gedächtnis speichert. Die dem Erkenntnissubjekt vorgegebene empirische Realität als Mannigfaltigkeit des Beobachtbaren würde so im besten Falle lediglich in der semantischen Sphäre verdoppelt.

(c) Vergleich der beiden Fälle miteinander

Der nähere Vergleich der Qualitätsmaße der vorbehandelten Fälle (a) und (b) miteinander ergibt unter Beschränkung auf die von Null verschiedenen Maßwerte für einige der obigen Beispiele:

Deduktives Beispiel	Induktives Beispiel	Wert
$qual'(i_{10}, i_{10}) =$	$qual'(i_5, i_5) =$	1
$qual'(i_8, i_{10}) =$	$qual'(i_7, i_5) =$	$\frac{2}{3}$
$qual'(i_6, i_{10}) =$	$qual'(i_9, i_5) =$	$\frac{1}{3}$
$qual'(i_5, i_{10}) =$	$qual'(i_{10}, i_5) =$	$\frac{1}{6}$

Tabelle 7

In Abb. 4 sind für Antworten j mit disjunktiven Gliedern sämtliche Möglichkeiten von Qualitätsbewertungen übersichtlich zusammengestellt. Man beachte die in eckige Klammern gesetzte "liberale" Alternative zur "rigorosen" Null-Bewertung. Von dieser Alternative sollte wenigstens auf der letzten Aufgabelungsstufe Gebrauch gemacht werden.

2.17 Nochmals: Zur Wahl der m-Funktion

Hinsichtlich der Wahl der "Gleichverteilungsfunktion" $m'(\cdot)$ sei nochmals an die in 2.7 erörterten Unstimmigkeiten erinnert. Diese betrafen das Maß der Bestätigungsfunktion, besitzen also nicht notwendig für dasjenige der Lernqualitätsfunktion Relevanz. Die Wahl der sich durch ihre Einfachheit auszeichnenden Funktion $m'(\cdot)$ scheint daher im vorliegenden Falle zumindest für erste Versuchsentwürfe der kybernetischen Pädagogik unbedenklich. Wählt man andererseits für Berechnungen der Lernqualität eine von $m'(\cdot)$ abweichende m-Funktion, etwa $m_\lambda(\cdot)$ oder $m^*(\cdot)$, so sind die sich aus der nichthomogenen Verteilung der Maße ergebenden Inadäquatheiten bei der Definition des Qualitätsmaßes zu berücksichtigen. Diesen Überlegungen soll im vorliegenden Zusammenhang im einzelnen nicht weiter nachgegangen werden.

2.18 Zweiter Exkurs: Induktiver Erweiterungsraum

Ein weiterer Aspekt sei jedoch hervorgehoben. Je nachdem, ob

$$\mathrm{ld}\,\frac{m'(j)}{m'(i_{opt})} > 0 \quad \text{oder} \quad < 0$$

ist, handelt es sich um deduktive oder induktive Abweichungen der Antwort j

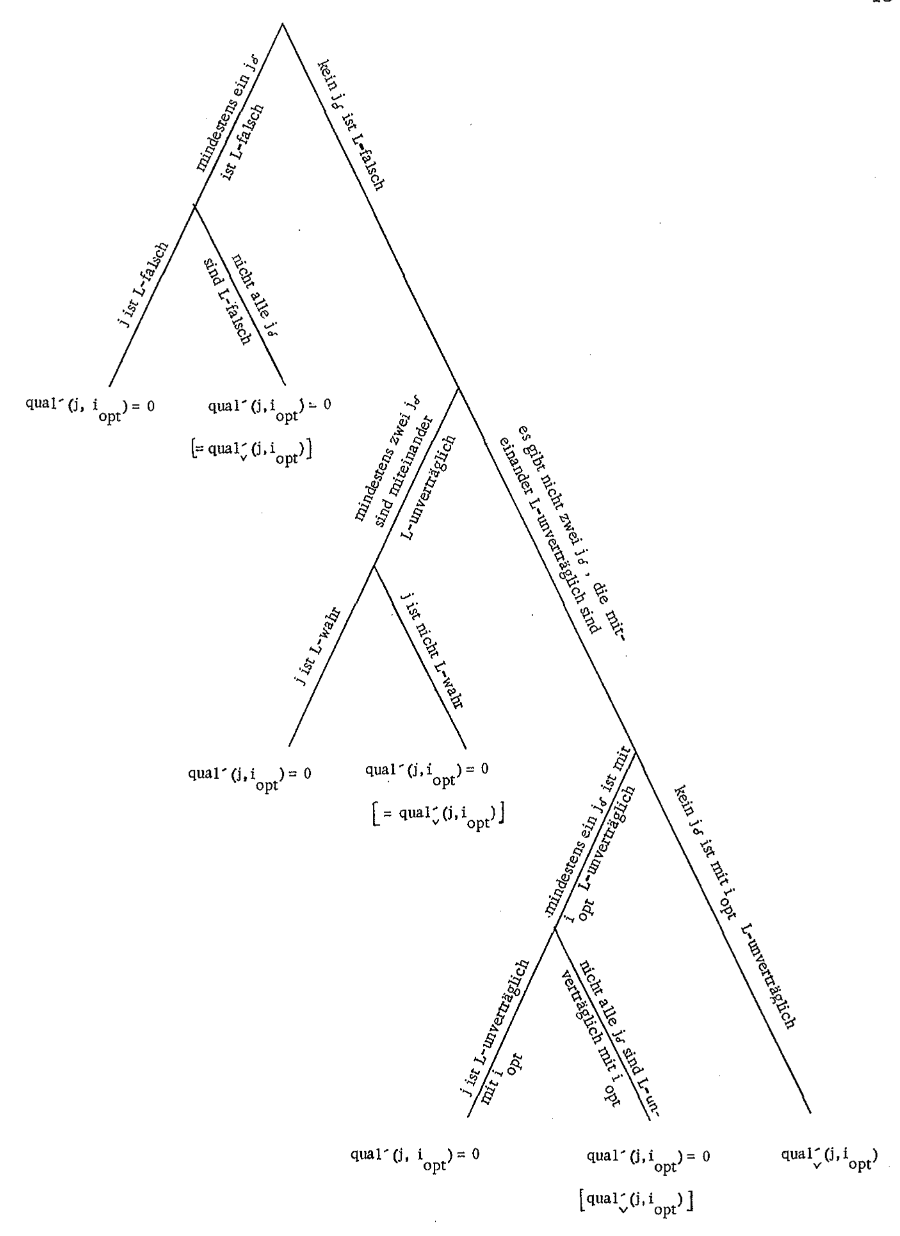
von der im Sinne des "repetitiven (Fakten-)Lernens" bestmöglichen Antwort i_{opt}. Man kann den deduktiven Aspekt vollständig ausklammern, indem etwa über die in (38) von 2.14 getroffenen Konventionen hinaus alle nicht "induktiven Antworten" ("Erweiterungsantworten") bezüglich einer in jenem Sinne optimalen Antwort mit dem qual-Wert Null belegt werden. Dann erhielte man bezüglich des Sprachsystems $\mathcal{L}_n^{\pi}$ einen "induktiven Lernraum", dessen Basis die jeweilige Klasse der im Sinne des "repetitiven Lernens" optimalen Antworten (Sätze von $\mathcal{L}_n^{\pi}$) darstellt. Faßt man diese "optimalen Sätze", die miteinander L-verträglich sein müssen und von denen keiner L-falsch sein darf, als empirische Prämissen e_1, ..., e_b auf und die aus diesen induktiv generalisierten Sätze als Hypothesen, so läßt sich durch Wahl einer bestimmten c-Funktion gemäß (29) in 2.5, etwa $c_\lambda(\cdot,\cdot)$ für $\lambda = 1$ (vgl. 2.9) oder $c^*(\cdot,\cdot)$ (vgl. 2.11), sowie durch Festsetzung eines Mindestwertes c_{min} ein "induktiver Lern- und Erweiterungsraum" bezüglich $e_1, \ldots, e_b$, in Zeichen $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$, dadurch definieren, daß ein $\mathcal{L}_n^{\pi}$-Satz j genau dann zu $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$ gehört, wenn

$$c_{min} \leq c(j, e_\beta) \leq 1$$

für alle e_β ($\beta = 1, \ldots, b$) gilt. Der Erweiterungsraum $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$, zu welchem auch seine eigene Basis $e_1, \ldots, e_b$ gehört, ist ein Unterraum des Totalraumes aller bezüglich $\mathcal{L}_n^{\pi}$ bildbaren, nicht L-falschen und nicht mit e_β L-unverträglichen Sätze. Diejenige wichtige echte Unterklasse von $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$, die genau die Gesamtheit der faktischen Sätze von $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$ enthält, soll der faktische Erweiterungsraum bezüglich $e_1, \ldots, e_b$ (und natürlich bezüglich $\mathcal{L}_n^{\pi}$) genannt und mit $\Omega^{\cdot}(e_1, \ldots, e_b)$ symbolisiert werden. Dabei mag es im Sinne der Bemerkung in 2.16 (b) dahingestellt bleiben, ob unter "induktiven Erweiterungen" von $e_1, \ldots, e_b$ solche des maximalen Toleranzfeldes der Bestätigungstheorie Carnaps zu verstehen sind oder ein engerer Induktionsbegriff zugrunde zu legen ist.

Lerntheoretisch kann die induktive Bildung eines subjektiven faktischen Erweiterungsraumes bezüglich einer vorgegebenen Klasse von $\mathcal{L}_n^{\pi}$-Prämissen e_1, ..., e_b und eines vorgegebenen c_{min}-Wertes (der gegebenenfalls λ-abhängig ist) in folgender Weise untersucht werden:

Das betrachtete Lernsystem A, das in jedem Falle erfolgreich befragbar und daher wenigstens im Sinne des Kybiak-Organismus motiviert und "semantischer Belegungen" fähig sein muß, bildet unter der Kontrolle von $c_{min} \leq c(j, e_\beta)$ ($\beta = 1, \ldots, b$) für alle möglichen Induktionssätze j mit $e_\beta \curvearrowright j$ seinen in der



(i_{opt} besitzt nur konjunktive Glieder; j kann auch disjunktive Glieder enthalten, also in der Form $j = j_1 \vee \ldots \vee j_d$ mit $d \geqq 1$ dargestellt werden; j_δ für $\delta = 1, \ldots, d$ bezeichne beliebige Disjunktionsglieder von j. $[qual'_\vee(j, i_{opt})]$ bedeutet: Alternativ zu 0 kann auch das Maß $qual'_\vee(j, i_{opt})$ gewählt werden)

Zeitspanne $T = [t_o, t_1]$ aufzubauenden subjektiven faktischen Erweiterungsraum bezüglich $e_1, \ldots, e_b$, der mit $\Omega_A(e_1, \ldots, e_b)$ bezeichnet werden möge. Dann kann etwa

$$\text{inh}\ [\Omega_A(e_1, \ldots, e_b)],$$

definierbar als Summe aller Inhalte $\text{inh}(j/e_\beta)$ gemäß (35) von 2.13, wo unabhängig voneinander über alle j und alle e_β zu summieren ist, als ein Maß der "induktiven Intelligenz" (oder doch wenigstens der "Induktionsdisponibilität") von A verwendet werden. Es liegt auf der Hand, daß hiermit der Typus des "repetitiven Lernens" und der diesem Lernen entsprechenden, vielleicht "uneigentlich" zu nennenden "Intelligenz" bei weitem überschritten ist.

Absichtlich war oben vom "induktiven L e r n - u n d Erweiterungsraum" die Rede. Faßt man nämlich "Lernen" in dem weiten Sinne der Anpassung eines (Molesschen) Organismus an sich ändernde Außenweltverhältnisse auf, so darf auch jeder Prozeß, der in der Verarbeitung von Außenwelt-Nachrichten mit gegebenem Informationsgehalt (gegebenem Inhaltsmaß bzw. gegebener Menge semantischer Information) zu Nachrichten mit g r ö ß e r e m Informationsgehalt sowie in der Abspeicherung dieser letzteren Nachrichten zwecks späterer Verfügbarmachung besteht, als Lernprozeß aufgefaßt werden. Man kann dieses informationsvermehrende Lernen als "induktives" oder "generalisierendes Lernen" bezeichnen. Sein Verhältnis zu dem, was wiederholt "repetitives Faktenlernen" genannt wurde, läßt sich unter Verwendung der Maßfunktion $\text{inh}[\Omega_A(\cdot, \ldots, \cdot)]$ in der folgenden Weise charakterisieren: $\text{inh}[\Omega_A(e_1, \ldots, e_b)] = 1$ kennzeichnet die b e s t e n f a l l s (bezüglich eines Sprachsystems $\mathcal{L}_n^\pi$ sowie einer Basis $e_1, \ldots, e_b$ von $\mathcal{L}_n^\pi$-Sätzen und eines Bestätigungswertes c_{min}) von einem Lernsystem A erreichbare und überhaupt bestmögliche "induktive Intelligenz" (diese als Fähigkeit der lernenden Anpassung verstanden), und $\text{inh}[\Omega_A(e_1, \ldots, e_b)] = 0$ kennzeichnet den gänzlichen Mangel an "induktiver Intelligenz". Andererseits ergibt sich $\text{inh}[\Omega_A(e_1, \ldots, e_b)] = 0$, wenn A die im Sinne des "r e p e t i t i v e n Lernens" bestmögliche Leistung erzielt, wenn nämlich jede der erfragten Antworten j mit der zugehörigen "optimalen" Antwort e_β zusammenfällt, die j also von den e_β nicht im geringsten "induktiv abweichen" (die "deduktive Abweichung" war für "induktive Erweiterungen" von vorneherein ausgeschlossen worden). Die Fähigkeiten des "induktiven" und des "repetitiven Lernens" stehen mithin im formalen Modell-Lehrsystem in zueinander gegenläufiger Relation, was natürlich nicht ausschließt, daß diese beiden Fähigkeiten in einem und demselben Lernsystem zusammen angelegt und, wenn schon vielleicht nicht simultan im Kleinen, auch zusammen auftreten können.[25)]

Das "repetitive Faktenlernen" erscheint im Lichte der "Theorie der induktiven Erweiterungen" als extremalisierender Spezialfall einer Kategorie von Lernarten, die sich wesentlich durch den Grad unterscheiden, in welchem der Informationsgehalt der erschlossenen Lernresultate über den Informationsgehalt der ursprünglich vom Lernsystem her empfangenen Sätze hinausgeht. Lernpsychologisch könnte vielleicht der Extremfall des rein "repetitiven Lernens" als eine semantisch zu interpretierende Unterart des "Bedingungslernens" in sehr weit zu nehmendem Sinne[26] aufgefaßt werden. Die Psychologie scheint hier gewisse Erklärungsansätze bieten zu können, die gleichzeitig darauf hinweisen mögen, inwieweit der durch die qual(•, •)-Funktion explizierte Begriff des "repetitiven Faktenlernens" tatsächlich ein empirisches Explikat besitzt. Schwieriger dürfte es sein, das oben erörterte "induktive Lernen" aus verfügbaren psychologischen Lerntheorien empirisch zu unterbauen.[27]

Eine sich mathematisch-logischer und speziell induktionslogischer Hilfsmittel bedienende formale Lerntheorie, die den erweiterten Rahmen für eine formale Didaktik liefern könnte, gibt es gegenwärtig noch nicht. Überhaupt ist eine formalisierte Pragmatik (im Sinne der Semiotik) noch mehr Programm als bereits in Angriff genommenes Werk der modernen Logikforschung. Es kann mithin nicht verwundern, daß Beziehungen der hier vorgetragenen Gedanken zu den gegenwärtigen Lerntheorien der Psychologie nur gleichsam zufällig sichtbar werden.

2.19 Dritter Exkurs: Heuristische Subkriterien für induktive Erweiterungen in $\mathfrak{L}_n^\pi$

Daß zwischen dem Aufbau von $\Omega(e_1, \ldots, e_b)$ einerseits und der durch $c_{min} \leq c(j, e_\beta)$ geleisteten Kontrolle andererseits - zuzüglich gewisser technischer Bestimmungen für das Lehr-Lern-System - eine enge lerntheoretische Korrespondenz besteht, bedarf keiner besonderen Erwähnung. Die Kontrollfunktion wird bei entsprechender Freisetzung des Lernsystems von algorithmischen oder algorithmusähnlichen Vorschriften wesentlich zur gleichsam autonomen Lernfunktion, indem sie die frei sich entfaltenden intuitiv-heuristischen Induktionsprozesse, die im stochastischen Extremfall rein aleatorische Prozesse sind, immer wieder "einfängt", d.h. dem Zwang des c_{min}-Kriteriums unterwirft.

Selbstverständlich können besonders im Blick auf maschinelle Induktionsprozesse, bei künstlichen Lernsystemen, diesem Hauptkriterium heuristische Subkriterien auf Ebenen einer womöglich flexiblen Hierarchie (mit stufenrelativer Rückkoppelung) zu- oder besser untergeordnet werden, die des näheren von Gegeben-

heiten des jeweiligen Sprachsystems, insbesondere von je bestimmten Klasseneigenschaften der Individuen und der Prädikate, abhängen.[28]) Von Klasseneigenschaften dieser Art war in 2.16 (b) die Rede.

2.20 Schlußbetrachtung

Die bis zu diesem Punkt geführte Problembearbeitung hat unter den dargelegten stark vereinfachenden Bedingungen und Voraussetzungen ein Maß der Lernqualität erbracht, das den Forderungen der Problemstellung gemäß 1.3 in wesentlichen Zügen gerecht wird. Dieses Maß, die Funktion (38), deren Wertevorrat in $[0,1]$ variiert, kann im Sinne von 1.3 für die Argumentbildung der "Didaktik-Funktion" $\Lambda = \Lambda_{PSML}(Z)$ verwendet werden, derart, daß wegen der parametrischen Funktionsform in dem einfachsten Fall genau eines zu lernenden Satzes $i = i_{opt}$ die Funktion die allgemeine Form

$$(40) \qquad \Lambda = \Lambda_{PSML}\left[\mathrm{qual}\,(i_{opt}, \cdot)\right]$$

annimmt, wo "$\cdot$" für die tatsächliche Wertebildung Λ durch die zugehörigen Antwortsätze j zu ersetzen ist. Je nachdem, ob das von j erzeugte $\mathrm{qual}(i_{opt}, j)$ oberhalb einer festgesetzten Schranke liegt oder nicht, wird zu einer neuen Lehrmethode übergegangen. Dabei ist vorausgesetzt, daß sich die jeweils in Frage stehenden Lehrmethoden Λ in der durch die angedeutete Funktionsform geforderten einfachen Weise anordnen lassen.

Besteht der dem Lernsystem angebotene "Basaltext" aus q Sätzen $i_1 = i_{opt,1}$, $\ldots$, $i_q = i_{opt,q}$, so erhält man eine Funktion von q Variablen, nämlich

$$(41) \qquad \Lambda = \Lambda_{PSML}\left[\mathrm{qual}\,(i_1, \cdot), \ldots, \mathrm{qual}\,(i_q, \cdot)\right].$$

Hier ist für jede Komponente des vektoriellen Arguments eine Mindestschranke festzusetzen und dafür zu sorgen, daß bezüglich des vorgelegten Basaltextes jeder zulässigen Belegung des Arguments durch Antwortsätze des Lernsystems genau eine wohldefinierte Lehrmethode zugeordnet ist. Nachdem der Definitionsbereich der "Didaktik-Funktion" (40) bzw. (41) als Abbildungs-Vorbereich formal weitgehend geklärt ist, dürfte die Bestimmung der Funktionsvorschrift möglich sein, sofern über die Abhängigkeit der verfügbaren Lehrmethoden von den Parametern P, S, M und L hinreichende Klarheit besteht. Diese Bestimmung fällt jedoch nicht mehr in den Rahmen der vorliegenden Problembearbeitung.

Desgleichen ist es nicht mehr Aufgabe dieser Untersuchung, das "semantische Input" für das Lernsystem zur Auslösung des "semantischen Lernsystem-Outputs" zu präzisieren. Es sei nur bemerkt, daß im Falle des Sprachsystems $\mathcal{L}_n^\pi$ das "Eingabewort" etwa ein "technisches Explikat" der an ein natürliches Lernsystem gerichteten Frage sein kann: "Welche Prädikate kommen dem Individuum a zu?" oder auf die Frage: "Welchen Individuen kommt das Prädikat P zu?", um wenigstens die einfachsten Frageformen anzudeuten. Eine "Theorie des Fragens", der adäquaten Wahl der jeweiligen "Eingabewörter" für das Lernsystem, ist wahrscheinlich das für die Praxis der Lernqualitätsbestimmungen dringendste Desiderat. Als logische oder zumindest logisch fundierte Theorie dürfte sie über das rein semantische Konzept hinausgehen, nämlich einen pragmatischen, und zwar imperativ-logischen Unterbau erfordern. Denn jede Frage stellt ja in Strenge "eine Forderung an den Befragten dar, einen wahren Satz zu behaupten, der die in der Frage formulierten Bedingungen erfüllt" (G. Frey[29]). "Theorien des Fragens", die einerseits für eine formale Didaktik fruchtbar gemacht werden können und andererseits den Strengeforderungen genügen, welche eine im Rahmen der mathematischen Logik betriebene Semiotik erhebt, sollten sich also pragmatischer und speziell imperativer Kalküle[30] bedienen. Einen formal-didaktischen "Fragekalkül" dieser Art gibt es noch nicht. Es wäre für höherentwickelte künstliche Lehrsysteme zur automatentechnischen Realisierung schaltalgebraisch zu interpretieren. Die Verwirklichung des hiermit vage angedeuteten Programms erfordert jedoch logische Vorleistungen, die auf der Ebene der formalisierten Pragmatik erst vor kurzem überhaupt in Angriff genommen wurden.[31] Vorerst wird man sich daher in der Didaktik mit semiotisch weniger präzisen Modell-Verfahren auf empirisch-statistischer Basis begnügen müssen. Hier wie dort jedenfalls betritt die gegenwärtige Didaktik-Forschung fast völliges Neuland.

Schließlich ist, vielleicht nicht ganz überflüssig für die herkömmliche Pädagogik, wieder einmal hervorzuheben, daß die ohne weiteres zugegebene Simplizität des rigoros vereinfachenden Modellfalls, an dem sich eine quantitative Analyse wie die hier vorgelegte zu orientieren hat, kein Argument gegen die Zweckmäßigkeit und Fruchtbarkeit dieser Analyse bietet, und schon gar nicht gegen deren wissenschaftliche Legitimität. Sicher handelt es sich bei dem System $\mathcal{L}_n^\pi$ um eine denkbar primitive Sprache, von der eine Umgangssprache in den Maßen der strukturellen und der funktionellen Komplexität ganz außerordentlich verschieden ist. Wenn man indes vor der Wahl steht, entweder der Komplexität der Umgangssprache gerecht zu werden und auf die exakt-quantitative Analyse des

vorgelegten Problems verzichten zu müssen oder, umgekehrt, das gestellte Problem unter rigoroser Vereinfachung der empirischen Gegebenheiten lösen zu können, so wird man vielleicht dann den zweiten Weg beschreiten, wenn dieser wenigstens die Möglichkeit schrittweiser Angleichung der Theorie an die komplexe Wirklichkeit erkennen läßt. Physik und Technik geben hierfür ein ermutigendes und nachahmenswertes Beispiel.

Anmerkungen

1) Dieser liegt eine Mitteilung von Herrn Prof. Dr. H. Frank, Berlin, vom 19. Januar 1966 an den Verfasser zugrunde.

2) Vgl. P. Heimann: Didaktik als Theorie und Lehre. In: Die deutsche Schule, 54. Jg., H. 9, p. 407-427, 1962.

3) Vgl. H. Frank: Automatentheoretische Ansätze in der kybernetischen Pädagogik. Vortr. geh. auf der Arbeitstagung über Automatentheorie in Hannover, Oktober 1965. Abgedruckt in Händler, Peschl und Unger (Hsg.): "ISNM-Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik." Basel, 1966.
Vgl. dazu auch H. Frank: "Lehrautomaten für Einzel- und Gruppenschulung" sowie "Ansätze zum algorithmischen Lehralgorithmieren" in Band 3 und Band 4 der Schriftenreihe "Lehrmaschinen in kybernetischer und pädagogischer Sicht". Stuttgart - München, 1965, 1966.

4) Am Rande stehende Zahlen in runden Klammern numerieren Annahmen, definitorische Gleichheiten und sonstige Ausgangsbestimmungen; entsprechend angebrachte Zahlen in eckigen Klammern dienen der numerierenden Kennzeichnung abgeleiteter Zusammenhänge.

5) Anstelle der verschiedenen Originalveröffentlichungen R. Carnaps sei hier das diese Arbeiten zusammenfassende und ausführlich erläuternde Werk von R. Carnap und W. Stegmüller genannt: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien, 1959.

6) Die nachfolgenden Unterabschnitte 2.3 bis 2.11 dienen der systematischen Zusammenstellung derjenigen Definitionen aus den Gebieten der deduktiven Logik, die bei der Problembearbeitung im engeren Sinne verwendet werden, sowie gelegentlich der Verdeutlichung der definierten Begriffe anhand einfacher

Beispiele. Der mit den Grundlagen der induktiven Logik vertraute Leser mag diesen Teil der Darstellung übergehen oder sich nur eben flüchtig orientieren. Näheres vgl. R. Carnap und W. Stegmüller, op. cit. Anm. 5.

7) m(•) bezeichne die Funktion als solche im Unterschied zu $m(\mathfrak{Z}_i)$ als dem Wert der Funktion an der Stelle $\mathfrak{Z}_i$. Entsprechendes gilt für die weiter unten im Text verwendete Schreibweise c(• , •) usf.

8) Es sei hier ohne nähere Erörterung auf die an Carnaps Vorschlägen geübte Kritik verwiesen. Vgl. vor allem H. Vetter: Wahrscheinlichkeit und logischer Spielraum. Eine Untersuchung zur Induktiven Logik. Noch unveröffentl. Man., 1965, insbesondere p. 112 ff.

9) R. Carnap hat ein Axiomensystem angegeben (op. cit. Anm. 5, p. 242 - 252), aus dem die Formel [3] folgt.

10) Die Molekular-Darstellung der Prädikate dient bekanntlich u. a. der vereinfachenden Darstellung von Molekularsätzen, z. B. $P_1a \wedge P_2a = (P_1 \wedge P_2)a$.

11) Vgl. hierzu allerdings die kritische Bemerkung in 2. 16 (b).

12) Vgl. hierzu R. Carnap und W. Stegmüller, op. cit. Anm. 5, insbesondere p. 70.

13) Über induktive Maschinen und heuristische Programme vgl. z. B. den Bericht von R. Tarján: Logische Maschinen. In: Digitale Informationswandler (Hrsg. W. Hoffmann), Braunschweig, 1962.

14) Vgl. H. Stachowiak: Denken und Erkennen im kybernetischen Modell. Wien-New York 1965. Ferner sei verwiesen auf T. Herrmann: Psychologie der kognitiven Ordnung. Berlin 1965.

15) Vgl. H. Stachowiak, op. cit. Anm. 14, sowie H. Stachowiak: Ein kybernetisches Motivationsmodell. In: H. Frank (Hrsg.) Lehrmaschinen in kybernetischer und pädagogischer Sicht, Bd. II, Stuttgart-München 1964, p. 119-134.

16) Vgl. hierzu und besonders zum Begriff der strukturellen Adäquation (eines Modells an sein Original) H. Stachowiak: Gedanken zu einer allgemeinen Theorie der Modelle. In: Studium Generale, 18. Jg., H. 7, 1965, p. 432 - 463.

17) Vgl. H. Stachowiak, op. cit. Anm. 14 u. 15.

18) Vgl. H. Vetter, op. cit. Anm. 8.

19) Vgl. Y. Bar-Hillel und R. Carnap: Semantic Information. In: Brit. J. Phil. Sci., 4, 1953, p. 147 - 157.

20) "-" ist hier natürlich ein Zeichen für die Klassendifferenz.

21) Von den Definitionen (34), (35) und (37) konnte dabei völlig abgesehen werden; sie kommen erst an späterer Stelle (2.18) zum Zuge.

22) Faßt man modelltheoretisch j als semantisches Modell, nicht im Sinne der Mathematik und mathematischen Logik als "Belegungsmodell" oder "Interpretation" einer abstrakten Struktur, sondern als "ikomorphe" Abbildung zuzüglich bestimmter "Subjektivierungsmerkmale" von i_{opt} auf und also i_{opt} als Original von j, so wäre die optimale Antwort im Falle inhaltlich-semantischer Belegung der betreffenden Sätze genau dann gegeben, wenn sowohl die strukturelle als auch die qualitative Angleichung des Modells an das Original (die Strukturadäquation und die Codeadäquation von j bezüglich i_{opt}) gleich 1, das Modell also isomorph und isohyl zum Original ist. Es werden in diesem Falle weder Originalmerkmale "präteriert" noch Modellmerkmale "abundiert", d.h. die Präteritionsklasse und ebenso die Abundanzklasse der Original-Modell-Relation ist leer. Diese hier nur angedeuteten modelltheoretischen Betrachtungen ließen sich für leistungsfähigere Sprachsysteme $\mathfrak{L}$ erheblich differenzieren. Zu den modelltheoretischen Termini vgl. die in Anm. 16 zitierte Arbeit des Verfassers (die Bezeichnung "homöomorph" ist in der vorliegenden Anm. durch "ikomorph" ersetzt).

23) Daß die zur Formulierung dieses Satzes verwendete deutsche Umgangssprache wesentlich reicher ist als $\mathfrak{L}_n^\pi$, soll hierbei wie schon bei der vorangegangenen Interpretation der Individuen und Prädikate von $\mathfrak{L}_n^\pi$ vernachlässigt werden.

24) Vgl. hierzu die immer noch außerordentlich lesenswerten Untersuchungen von J. M. Keynes: Über Wahrscheinlichkeit (aus dem Engl. übers. v. F. M. Urban). Leipzig 1926, insbes. p. 188-223.

25) Man beobachtet dies jedenfalls an natürlichen Lernsystemen. Die Fähigkeit eines intellektuell durchschnittlich ausgestatteten Schülers, beide Lernarten ins Spiel zu bringen, ermöglicht es, in förderlicher Weise von der einen, dem "repetitiven Lernen", zur anderen, dem "induktiven Lernen" überzugehen, und umgekehrt (bei gleichzeitiger Ausbildung der deduktiven und abstrahierenden Fähigkeiten). Nur in extremen Fällen ist die "Induktionsdisponibilität" eines Schülers und damit dessen Vermögen, in zielgerichteter Weise informationsvermehrend zu denken, so gering, daß er auf entsprechende Aufforderungen, "induktive Antworten" (bezüglich der Basis eines "induktiven Lern- und Erweiterungsraumes") zu geben, ausschließlich oder weit überwiegend nur repetitiv zu antworten vermag.

In dem Maße, in welchem die an diesen Schüler gerichteten Fragen "Freiheitsspielräume der Repetition" gewähren (oder er selbst sich solche Freiheitsspielräume gewährt), wird er verschieden lange Serien von Teilantworten zusammenstellen ("assoziieren"), die strukturell in gewisser Näherung als Markoffkette gelten können: r benachbarte Teilantworten legen immer die Wahrscheinlichkeit der (r + 1)-ten Teilantwort innerhalb der Gesamtantwort fest. Der Antwortende erscheint so als eine stochastische Satzfolgen erzeugende Markoffquelle, die für kleine Werte von r, insbesondere für r = 0, und für geringe Verbundwahrscheinlichkeiten mehr und mehr aleatorische Formen der Repetition des vormals Eingelernten annimmt.

26) Genannt seien hier nur die Reflextheorie I. P. Pawlows und die Kontiguitätstheorie E. R. Guthries.

27) Ansätze vielleicht in den Beiträgen E. C. Tolmans, E. L. Thorndikes, B. F. Skinners und C. L. Hulls zu den lerntheoretischen Untersuchungsbereichen der Diskrimination, Transferierung und Generalisation.

28) Über heuristische Programme vgl. z. B. R. Tarján: Logische Maschinen. In: Digitale Informationswandler (Hrsg. W. Hoffmann), Braunschweig 1962, p. 110-159, insbes. p. 143 ff.

29) G. Frey: Imperativ-Kalküle. In: The Foundations of Statements and Decisions. Int. Coll. of Methods of Science. Polish Scientific Publ., Warczawa, 1965, p. 369.

30) Vgl. G. Frey, op. cit. Anm.29, p. 369-383, sowie die ausführliche Darstellung desselben Verfassers: Die Idee einer Wissenschaftslogik. Grundzüge einer Logik imperativer Sätze. In: Philosophia Naturalis, Bd. IV, H. 4, Meisenheim/Glan, 1957, p. 434-491.

31) Ein erster Versuch zur Formalisierung der allgemeinen Pragmatik findet sich bei R. M. Martin: Toward a Systematic Pragmatics. Amsterdam, 1959. Er wurde vom gleichen Verfasser erweitert in der Abhandlung "Toward a Logic of Intensions", abgedruckt in: Form and Strategy in Science, Dordrecht-Holland 1964, pp. 146-167.